

## 10 класс

**10.1.** 33 богатыря выходят в дозор 33 дня. В первый день должен выйти один богатырь, во второй – два, в третий – три, и так далее, в последний день – все богатыри. Сможет ли дядька Черномор организовать дозоры так, чтобы все богатыри вышли в дозор одинаковое количество раз?

**Ответ:** сможет.

**Решение.** Так как  $1 + 2 + \dots + 33 = \frac{1+33}{2} \cdot 33 = 17 \cdot 33$ , то каждый богатырь должен выйти в дозор 17 раз. Пусть, например, Черномор пронумерует богатырей и в первые 16 дней богатыри выходят в дозор в соответствии со своими номерами: в первый день – богатырь с номером один, во второй – с номерами 1 и 2, и так далее, в шестнадцатый день – богатыри с номерами от 1 до 16. В следующие 16 дней порядок выхода такой: в семнадцатый день – богатыри с номерами от 17 до 33, в восемнадцатый – с номерами от 16 до 33, и так далее, в тридцать второй день : богатыри с номерами от 2 до 33. Таким образом, за эти дни каждый богатырь побывает в дозоре 16 раз, а в последний день выйдут все.

*Это решение можно изложить в общем виде, например, так. Например, пусть в  $k$ -ый день, где  $1 \leq k \leq 16$ , выходят богатыри с номерами от 1 до  $k$ , а все богатыри, которые не вышли в  $k$ -ый день, выходят в день, имеющий номер  $33 - k$ . Тогда за каждую пару дней вида  $(k; 33 - k)$  в дозоре побывают все богатыри, и каждый выйдет 16 раз – по количеству таких пар. После этого они все вместе выйдут в последний день.*

Критерии проверки.

“+” Приведено полное обоснованное решение

“±” Приведен верный алгоритм, но рассуждения не полны или содержат неточности

“-” Приведен только ответ

“-” Приведено неверное решение или оно отсутствует

**10.2.** Существуют ли такие попарно различные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , что число  $a$  является корнем квадратного трехчлена  $x^2 - 2bx + c^2$ , число  $b$  является корнем квадратного трехчлена  $x^2 - 2cx + a^2$ , а число  $c$  является корнем квадратного трехчлена  $x^2 - 2ax + b^2$ ?

**Ответ:** не существуют.

**Решение.** Предположим, что такие числа нашлись. Тогда выполняются равенства:  $a^2 - 2ba + c^2 = 0$ ,  $b^2 - 2cb + a^2 = 0$  и  $c^2 - 2ac + b^2 = 0$ . Сложим эти равенства. Перегруппировав и выделив полные квадраты, получим:  $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$ . Это возможно только в случае, когда  $a = b = c$ , что противоречит условию.

Критерии проверки.

“+” Приведено полное обоснованное решение

“±” Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности

“∓” Присутствует только верная идея сложения равенств, не доведенная до конца

“-” Приведен только ответ

“-” Приведено неверное решение или оно отсутствует

**10.3.** Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Оказалось, что радиусы  $OA$  и  $OB$  первой окружности являются касательными ко второй окружности. Через точку  $A$  проведена прямая, которая вторично пересекает окружности в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $MB \perp NB$ .

**Решение.** Пусть  $\angle BMN = \alpha$ ,  $\angle BNM = \beta$  (см. рис. 10.3 а, б).

Первый способ. См. рис. 10.3а. Заметим, что  $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$  (по теореме об угле между касательной и хордой),  $\angle AOB = 2\beta$  (центральный угол). Из треугольника  $AOB$ :  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ , значит  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Следовательно,  $\angle MBN = 90^\circ$ , что и требовалось.

Второй способ. См. рис. 10.3б. Пусть  $Q$  – центр второй окружности, тогда  $\angle OQB = \frac{1}{2} \angle AQB = \alpha$ ,  $\angle QOB = \frac{1}{2} \angle AOB = \beta$ . Следовательно, треугольники  $QBO$  и  $MBN$  подобны. Но  $\angle QBO = 90^\circ$  (перпендикулярность касательной и радиуса), значит,  $\angle MBN = 90^\circ$ , что и требовалось.

*Существуют и другие способы рассуждений, например, можно использовать, что четырехугольник  $OQBN$  – вписанный (см. рис. 10.3б).*

Рис. 10.3а

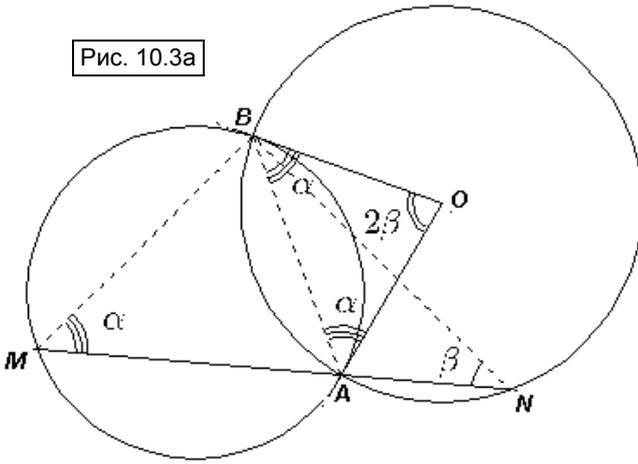
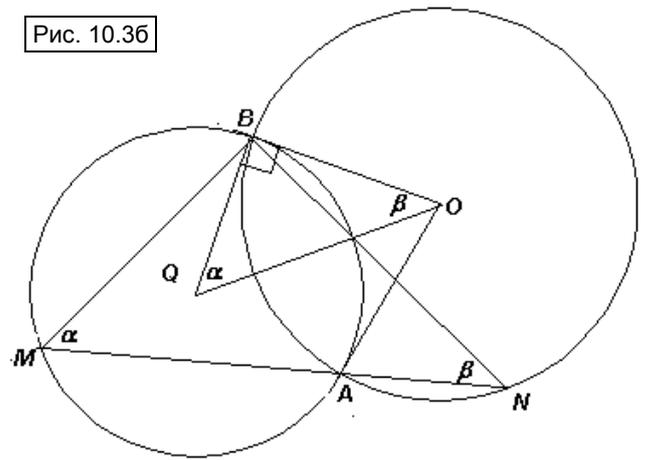


Рис. 10.3б



**Критерии проверки.**

“+” Приведено полное обоснованное решение

“±” Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности

“–” Приведено неверное решение или оно отсутствует

**10.4.** Выписаны все делители некоторого натурального числа, кроме единицы и его самого. Какие-то два числа из этого списка отличаются в шесть раз. А во сколько раз отличаются два самых больших числа из этого списка?

**Ответ:** в полтора раза.

**Решение.** Пусть среди делителей числа  $N$  есть числа  $a$  и  $6a$ , тогда  $N$  делится на  $6a$ . Следовательно  $N$  делится на 2 и на 3, то есть 2 и 3 – два наименьших числа в списке. Тогда два наибольших числа в списке – это  $\frac{N}{3}$  и  $\frac{N}{2}$ . Их отношение:  $\frac{N}{2} : \frac{N}{3} = \frac{3}{2}$ .

**Критерии проверки.**

“+” Приведено полное обоснованное решение

“±” Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности

“+” Верный ответ получен, исходя из того, что 2 и 3 – наименьшие числа в списке делителей, но их присутствие в этом списке не доказано

“+” Верный ответ получен, исходя из рассмотрения конкретных примеров

“–” Приведен только ответ

“–” Приведено неверное решение или оно отсутствует

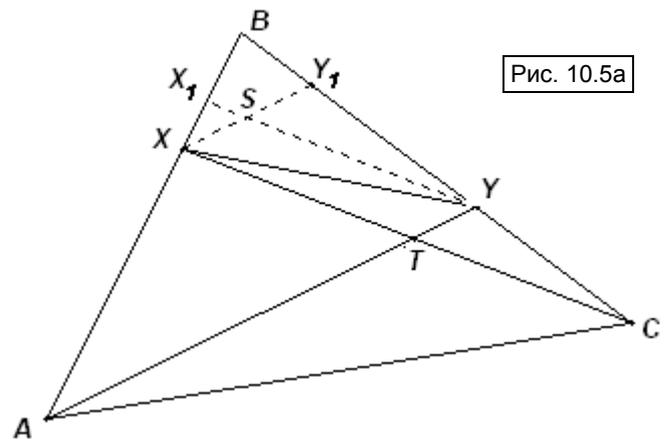
**10.5.** На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $X$  и  $Y$  соответственно. Отрезки  $CX$  и  $AY$  пересекаются в точке  $T$ . Докажите, что площадь треугольника  $XYU$  больше площади треугольника  $XTU$ .

**Решение.** Первый способ. Отметим на отрезке  $BX$  точку  $X_1$  так, что  $YX_1 \parallel CX$  (см. рис. 10.5а). Аналогично, на отрезке  $BY$  выберем точку  $Y_1$  так, что  $XY_1 \parallel AY$ . Пусть отрезки  $YX_1$  и  $XY_1$  пересекаются в точке  $S$ . Тогда  $XSUT$  – параллелограмм, поэтому равны треугольники  $XSU$  и  $YTX$ , следовательно, равны и их площади. Но площадь треугольника  $XYU$  больше площади треугольника  $XSU$ , значит,  $S_{XYU} > S_{XTU}$ .

Отметив указанным образом точку  $X_1$ , можно рассуждать иначе: из подобия треугольников  $XAT$  и  $X_1AY$  следует, что  $YX_1 > TX$ . Тогда  $S_{XTU} < S_{XYX_1} < S_{XYU}$ .

Задача допускает также многочисленные вычислительные решения. Приведём одно из них.

Рис. 10.5а



Второй способ. Обозначим площади треугольников буквами  $a, b, c, d, e$  так, как показано на рис. 10.56.

Так как площади треугольников с общей высотой относятся как их основания, то  $\frac{b}{d} = \frac{XT}{TC} = \frac{c}{e}$ . Тогда  $e = \frac{cd}{b}$ . Аналогично,  $\frac{a}{b+d} = \frac{BY}{YC} = \frac{a+b+c}{d+e}$ . Отсюда  $a(d+e) = (a+b+c)(b+d)$ .

Выразим  $a$  из этого равенства, учитывая найденное выражение для  $e$ :  

$$a = \frac{(b+c)(b+d)}{e-b} = \frac{(b+c)(b+d)}{\frac{cd}{b}-b} = \frac{b(b+c)(b+d)}{cd-b^2}$$
.

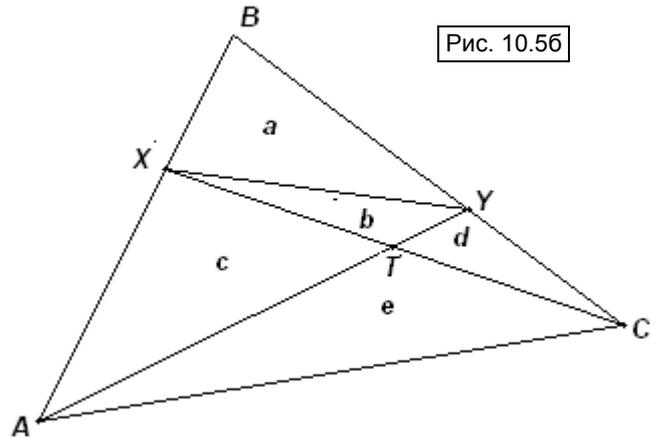


Рис. 10.56

Тогда требуемое неравенство  $a > b$  следует из того, что  $\frac{(b+c)(b+d)}{cd-b^2} > 1$ . Последнее неравенство выполняется, так как числитель дроби больше  $cd$ , а знаменатель меньше, чем  $cd$ .

Критерии проверки.

“+” Приведено полное обоснованное решение

“±” Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности

“-” Приведено неверное решение или оно отсутствует

**10.6.** Есть две коробки, в одной 2017 конфет, а в другой 2018. Играют двое, ходят по очереди. За один ход каждый может съесть любое количество конфет, отличное от нуля, из любой коробки. Правила игры не допускают, чтобы после какого-то хода число конфет в одной из коробок делилось на число конфет в другой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход, не нарушив этого условия. Кто сможет выиграть: начинающий игру или второй игрок, как бы ни играл его соперник?

**Ответ:** сможет выиграть первый.

**Решение.** Для того, чтобы выиграть, первый игрок после каждого своего хода должен создавать ситуацию, когда в одной из коробок  $2n$  конфет, а в другой  $2n + 1$  ( $n$  – натуральное число). В такой ситуации он заведомо не проигрывает.

Сначала он съедает две конфеты из второй коробки и получает нужную ситуацию. В дальнейшем, в ответ на любой ход второго игрока первый будет восстанавливать такое распределение конфет. Покажем, что он сможет это делать. Возможны 4 случая.

- 1) Второй ест четное количество конфет из той коробки, где их  $2n$ . Тогда в ней останется  $2m$  конфет ( $m > 0$ , иначе второй проиграл). В ответ первый съедает из другой коробки такое же количество конфет, и в ней остается  $2m + 1$ .
- 2) Второй ест нечетное количество конфет из той коробки, где их  $2n$ . Тогда в ней останется  $2m + 1$  конфет ( $m > 0$ , иначе второй проиграл). В ответ первый съедает из другой коробки на две конфеты больше и в ней остается  $2m$ .
- 3) Второй ест нечетное количество конфет из той коробки, где их  $2n + 1$ . Тогда в ней останется  $2m$  конфет, где  $0 < m < n$  (иначе второй проиграл). В ответ первый съедает из другой коробки на две конфеты меньше и в ней остается  $2m + 1$ .
- 4) Второй ест четное количество конфет из той коробки, где их  $2n + 1$ . Тогда в ней останется  $2m + 1$  конфет ( $m > 0$ , иначе второй проиграл). В ответ первый съедает из другой коробки такое же количество конфет, и в ней остается  $2m$ .

Действуя таким образом, первый (если второй до этого ни разу не ошибётся) сведет игру к тому, что в одной коробке останется две конфеты, а в другой три, и после этого второй проигрывает, какой бы ход он ни сделал.

Критерии проверки.

“+” Приведено полное обоснованное решение

“±” Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности

“∓” Приведена верная стратегия, но она не обоснована

“-” Приведен только ответ или ответ, полученный рассмотрением конкретных примеров

“-” Приведено неверное решение или оно отсутствует