**Всероссийская олимпиада школьников по экономике**

**Заключительный этап**

Москва, 14—19 апреля 2018 года

# 9-й класс
# Второй тур

| | |
|---|---|
| Дата написания | **16 апреля 2018 г.** |
| Количество заданий | **4** |
| Сумма баллов | **24** |
| Время написания | **180 минут** |

## Решения

Составители написали приведенные ниже решения более подробно, чем если бы им самим пришлось участвовать в олимпиаде. Данный документ содержит пояснения, примечания, альтернативные способы решений, которые предназначены исключительно для информирования жюри, а также всех, кто будет разбирать эти задачи в дальнейшем при изучении экономики или подготовке к олимпиадам. От участников не требуется слишком подробного решения; в любом случае самое важное при оценке — понимает ли участник, как решается задача.

## **Задача 5**. Сосисочная олигополия **(6 баллов)**

Рынок сосисок в стране N далек от совершенной конкуренции: на нем действуют лишь две фирмы (A и B). Будем считать для простоты, что никаких издержек они не несут. Потребители сосисок делятся на две группы, спрос которых (в тоннах) описывается функциями $D_1(p) = 16 - p$ и $D_2(p) = 12 - 3p$, где $p$ — цена за тонну сосисок. Взаимодействие между фирмами устроено следующим образом: сначала фирма A решает, сколько тонн сосисок она собирается произвести, после этого фирма B узнает о решении фирмы A и выбирает объем выпуска. После того, как обе фирмы выбрали свои объемы выпуска, на рынке устанавливается такая (общая для всех потребителей) цена, чтобы величина спроса была равна сумме объемов производства двух фирм.

**а) (3 балла)** Во главе фирмы A стоит некомпетентный директор, который не имеет понятия, как нужно выбирать выпуск, чтобы получить максимальную прибыль, и просто выбирает произвольный объем выпуска $q_A$. Какой объем выпуска $q_B$ выберет фирма B в ответ, если она прекрасно умеет максимизировать прибыль?

**б) (3 балла)** Предположим, фирму A возглавил более компетентный менеджер, который умеет выбирать выпуск так, чтобы в результате его фирма получила максимальную прибыль. Какой объем выпуска он выберет?

### ***Решение***

**а)** Во-первых, зададим рыночный спрос:

$$q_d(p) = \begin{cases} 16 - p, & 4 \leqslant p \leqslant 16 \\ 28 - 4p, & 0 \leqslant p \leqslant 4 \end{cases} \qquad p_d(q) = \begin{cases} 16 - q, & 0 \leqslant q \leqslant 12 \\ 7 - 0{,}25q, & 12 \leqslant q \leqslant 28 \end{cases}$$

Как всегда, решаем задачу с конца:

$$\pi_B(q_B) = \begin{cases} (16 - q_A - q_B)q_B, & 0 \leqslant q_A + q_B \leqslant 12 \\ (7 - 0{,}25q_A - 0{,}25q_B)q_B, & 12 \leqslant q_A + q_B \leqslant 28 \end{cases}$$

На обоих участках графиком функции прибыли являются параболы с ветвями вниз, значит,

$$q_B(q_A) = \begin{cases} 8 - 0{,}5q_A, & 0 \leqslant q_A + q_B \leqslant 12 \\ 14 - 0{,}5q_A, & 12 \leqslant q_A + q_B \leqslant 28 \end{cases}$$

Посмотрим на области определения:

$$0 \leqslant q_A + q_B = q_A + 8 - 0{,}5q_A = 8 + 0{,}5q_A \leqslant 120 \leqslant q_A \leqslant 8$$
$$12 \leqslant q_A + q_B = q_A + 14 - 0{,}5q_A = 14 + 0{,}5q_A \leqslant 280 \leqslant q_A \leqslant 28$$

Видим, что в случае, если фирма A выбирает $0 \leqslant q_A \leqslant 8$, у второй компании есть два доступных варианта — она может выбрать свой выпуск так, что равновесие будет на любом из участков спроса. Сравним прибыли: частная компания будет работать на первом участке, когда

$$(8 - 0{,}5q_A)^2 \geqslant 0{,}25(14 - 0{,}5q_A)^2 8 - 0{,}5q_A \geqslant 0{,}5(14 - 0{,}5q_A)$$
$$8 - 0{,}5q_A \geqslant 7 - 0{,}25q_A 1 \geqslant 0{,}25q_A 0 \leqslant q_A \leqslant 4$$

Итак, в ответ на решение компании A фирма B будет выбирать

$$q_B(q_A) = \begin{cases} 8 - 0{,}5q_A, & 0 \leqslant q_A \leqslant 4 \\ 14 - 0{,}5q_A, & 4 \leqslant q_A \leqslant 28 \end{cases}$$

При этом точку $q_A = 4$ можно включить в любой промежуток: прибыль компании B будет одинакова в обоих случаях. Заметим, что данная функция не является монотонно убывающей на промежутке $q_A \geqslant 0$. Например, если лидер увеличивает свой выпуск, скажем, с 3 до 5 единиц продукции, то последователь также увеличит свой выпуск с 6,5 до 11,5 единиц продукции.

**б)** Запишем функцию прибыли компании A:

$$\pi_A(q_A) = \begin{cases} (16 - q_A - q_B)q_A \\ (7 - 0{,}25q_A - 0{,}25q_B)q_A \end{cases} = \begin{cases} (8 - 0{,}5q_A)q_A, & 0 \leqslant q_A \leqslant 4 \\ (3{,}5 - 0{,}125q_A)q_A, & 4 \leqslant q_A \leqslant 28 \end{cases}$$

На обоих участках графиком функции прибыли являются параболы с ветвями вниз; вершина первой параболы находится в точке 8 и не попадает в область определения; вершина второй параболы находится в точке 14 и попадает в область определения. Стало быть, фирма A выберет выпуск $q_A = 14$ тонн сосисок, тогда фирма B выберет выпуск $q_B = 7$ тонн сосисок; на рынке установится цена $p = 1{,}75$ рублей. Фирмы получат прибыли $\pi_A = 24{,}5$ и $\pi_B = 12{,}25$.

## *Схема оценивания*

**а) (3 балла) 1 балл** ставится за поиск суммарнго спроса.

**1 балл** ставится максимизацию прибыли фирмы B на разных участках спроса.

**1 балл** ставится за построение итоговой кривой реакции фирмы B.

**б) (3 балла)** Полный балл ставится в случае корректной максимизации прибыли. За арифметическую ошибку снимается 1 балл.

## **Задача 6**. Бесконечные апелляции **(6 баллов)**

Судебная система Кукумбрии состоит из судов 3 инстанций. Сначала споры рассматриваются в суде I инстанции, который выносит свое решение. Любая сторона процесса имеет право подать апелляцию на решение суда I инстанции в суд II инстанции. На решение суда II инстанции любая сторона может подать апелляцию в суд III инстанции. Решение суда III инстанции является окончательным и не может быть оспорено.

В таблице приведена статистика о ходе судебных процессов по искам физических лиц в Кукумбрии в 2017 году. «Участниками» называются стороны, чей спор рассматривается в суде.

| | I инстанция | II инстанция | III инстанция |
|---|---|---|---|
| Число дел | 1 047 | 313 | 85 |
| Доля удовлетворенных исков (апелляций) | 60 % | 45 % | 35 % |
| Пошлина за подачу заявления, тугриков | 1 000 | 1 000 | 1 000 |
| Средний возраст участника, лет | 43 | 40 | 36 |
| Доля мужчин среди участников | 68 % | 71 % | 67 % |
| Средний срок рассмотрения дела, дней | 212 | 256 | 301 |
| Доля участников, нанимающих адвокатов | 96 % | 95 % | 93 % |

Казалось бы, оптимальной стратегией каждой стороны, недовольной судебным решением, было бы обжалование решения подряд во всех инстанциях. В этом случае работа судов была бы парализована.

**а) (3 балла)** Объясните, какой экономический механизм может препятствовать использованию такой стратегии? Иными словами, почему апелляции подают не все те, кто проигрывает в суде предыдущей инстанции?

**б) (3 балла)** Опыт проведения Всероссийских олимпиад по экономике показывает, что необоснованные апелляции на результаты проверки работ подает большое число участников. Пользуясь логикой предыдущего пункта, предложите механизм, который позволил бы жюри сократить число необоснованных апелляций. Имейте в виду, что должны сохраниться основные олимпиадные принципы, в том числе равноправие всех участников, стремление жюри исправить все неточности и обеспечить справедливые результаты. Объясните, почему вы считаете, что предложенный механизм должен сработать.

### *Решение*

**а)** Если бы подача апелляций не была связана ни с какими издержками, то подавать ее всякий раз после не устраивающего сторону решения действительно было бы оптимальной стратегией. Однако в судебном процессе существуют как минимум две категории издержек:

- **Материальные издержки**. В ходе судебного процесса возникают расходы на наём адвокатов и госпошлину.
- **Издержки времени**. Процесс рассмотрения апелляции занимает много времени. У потерянного времени есть альтернативная стоимость.

Если у проигравшей стороны нет достаточной уверенности в том, что решение является несправедливым, а шансы на положительный исход рассмотрения апелляции достаточно велики, то нет смысла подавать апелляцию — это с большой вероятностью обернется понесенными издержками при неизменном решении.

**б)** Например, можно предложить снимать 1 балл за заведомо необоснованную апелляцию. В этом случае число стратегических апелляций снизится, а подавать их будут школьники, уверенные в том, что при проверке была допущена ошибка.

### *Схема оценивания*

**а) (3 балла)**

- Сказано про субъективную оценку маленькой вероятности победы, но ничего не говорится про издержки — **1 балл**
- В качестве причины указан любой вида издержек истца, связанный с судебным процессом, но ничего не говорится про субъективную оценку вероятности победы — **2 балла**
- Отмечено наличие издержек и сравнительно небольшая субъективная вероятность победы — **3 балла**

**б) (3 балла)**

- Не объяснено, что предложенный механизм приведет к желаемому результату — **1 балл**
- Приведен дискриминационный механизм — **0 баллов**

## **Задача 7**. Мед и хлопья (8—9) **(6 баллов)**

На левом (L) и правом (R) берегах Молочной реки живут по 300 человек, которые потребляют на завтрак только блюдо «Хлопья с медом», приготовленное по старинным рецептам. Жителям каждого берега 1 литра меда хватает на 100 порций. Иными словами, если $y$ — это объем кукурузных хлопьев, измеряемый в порциях, а $b$ — объем меда в литрах, то $y_L = 100b_L$ и $y_R = 100b_R$. Чтобы сделать порцию завтрака, нужно смешать кукурузные хлопья с медом непременно в заданной пропорции и добавить молоко. Каждый житель любит такие завтраки и готов их съесть чем больше, тем лучше.

Молоко у жителей есть в неограниченном количестве, а мед и хлопья нужно производить. Каждый житель может тратить свое рабочее время на пасеке или в кукурузном поле. Будем считать, что один пасечник может следить за одним ульем пчел, который производит 1 литр меда. Урожай кукурузы зависит от интенсивности опыления пчелами. Некоторые пчелы летают в том числе на другой берег и опыляют кукурузу там, поэтому ежемесячный урожай кукурузы на каждом берегу зависит от того, сколько пчел на обоих берегах:

$$y_L = (b_L + b_R/3) \cdot x_L,$$
$$y_R = (b_R + b_L/3) \cdot x_R,$$

где $y$ — производство кукурузных хлопьев, $b$ — количество ульев пчел, $x$ — число рабочих, занятых в производстве кукурузных хлопьев (может быть нецелым). Индексы у всех переменных означают берег.

**а) (3 балла)** Пусть каждый регион независимо принимает решение о распределении труда между отраслями. Постройте графически кривую производственных возможностей каждого берега для какого-то фиксированного числа ульев на другом берегу. Назовем *равновесием* такое состояние, когда жители каждого берега не захотят менять распределение труда после того, когда узнают число ульев у другого берега. Сколько меда и хлопьев будет произведено в равновесии?

**б) (3 балла)** Предположим, два берега объединили усилия и совместно решают, как распределить трудовые ресурсы между пасеками и полями (при этом люди переплывать на другой берег не могут, но передавать мед и хлопья могут). Найдите общую границу производственных возможностей двух берегов. Найдите, сколько меда и хлопьев будет произведено в случае объединения усилий.

## *Решение*

**а)** Подставим ресурсные ограничения в производственные функции и получим КПВ:

$$y_L = (b_L + b_R/3)(300 - b_L)$$
$$y_R = (b_R + b_L/3)(300 - b_R)$$

Построим их графически:

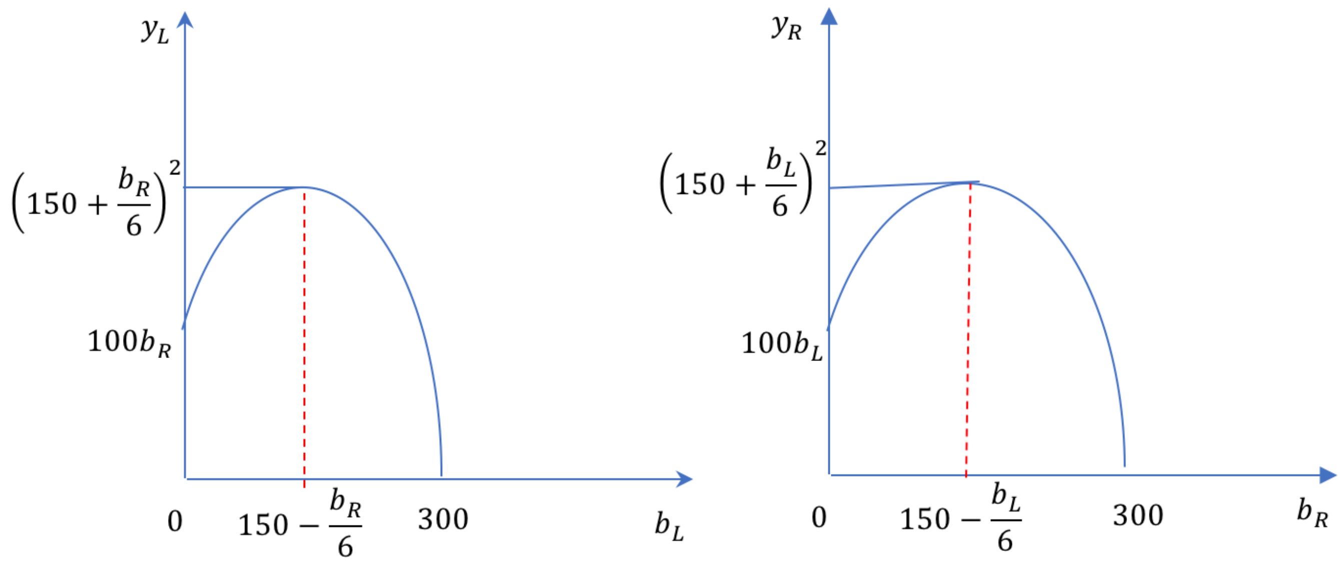


Рис. 7.1: КПВ отдельных берегов

У КПВ есть возрастающие участки. Если нам нужно не производственное множество, а множество наборов, доступных для потребления, то можно предположить, что каждый берег может легко утилизировать часть произведенного меда (на рисунке представлены оба варианта, в решении участников засчитывается любой).

Теперь найдем оптимальный выбор каждого берега. Прямые $y_L = 100b_L$ и $y_R = 100b_R$ (задаваемые рецептом завтрака из условия) пересекут КПВ на убывающих участках парабол. Чтобы выбор обоих берегов составлял равновесие (по определению, данному в условии), оба равенства должны выполняться одновременно — иначе кому-то будет выгодно поменять свое решение. Составим систему:

$$\begin{cases} 100b_L = -b_L^2 - \frac{b_L b_R}{3} + 100b_R + 300b_L \\ 100b_R = -b_R^2 - \frac{b_L b_R}{3} + 100b_L + 300b_R \end{cases}$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем $b_R^2 - b_L^2 + 100b_L - 1000b_R = 0$, или $(b_R - b_L)(b_L + b_R - 100) = 0$. Значит, или $b_R = b_L$, или $b_L + b_R = 100$. Второй вариант не соответствует убывающим участкам парабол. Подставляем $b_R = b_L$ и получаем $b_R = b_L = 225$, тогда $y_L = y_R = 22500$.

**б)** Просуммируем два уравнения КПВ

$$y = -b_L^2 - \frac{b_L b_R}{3} + 100b_R + 300b_L - b_R^2 - \frac{b_L b_R}{4} + 100b_L + 300b_R \quad (7.1)$$

$$y = -b_L^2 - \frac{2b_L b_R}{3} + 400b_R + 400b_L - b_R^2 \quad (7.2)$$

Заменим $b_L = b - b_R$ и упростим:

$$y = -b^2 - b_R^2 + 2bb_R - \frac{2b \cdot b_R}{3} + \frac{b_R^2}{3} + 400b - b_R^2 \tag{7.3}$$

$$y = -\frac{4}{3}b_R^2 + \frac{4}{3}bb_R - b^2 + 400b \tag{7.4}$$

Это парабола с ветвями вниз относительно $b_R$. Чтобы оптимизировать производство, нужно таким образом производить мед на берегах, чтобы больше всего получилось хлопьев. Вершина параболы в точке $b_R = b/2$, при этом $b_L = b/2$.

Подставляем и получаем $y = -\frac{2}{3}b^2 + 400b$. Вершина параболы в точке 300. Новый выбор:

$$100b = -\frac{2}{3}b^2 + 400b,$$

то есть $b = 450$, и ответ не отличается от предыдущего пункта.

## *Схема оценивания*

**а) (3 балла) 1 балл** ставится за верно построенную КПВ.

**2 балла** ставится за полностью обоснованный поиск равновесия.

**б) (3 балла)**

- **1 балл**: записана сумма КПВ и сделана попытка решения (попытка избавиться от параметров).
- **1 балл**: получена новая КПВ.
- **1 балл**: поиск нового количества завтраков.

## **Задача 8**. Коробки **(6 баллов)**

Аделаида, Бенедикт, Василиса и Герасим хотят отправить подарки своей бабушке по почте. Подарки весят 1, 3, 5 и 8 килограммов соответственно. Подарки должны быть упакованы в специальные коробки, которые бывают трех видов: маленькие, средние и большие.

Несмотря на то, что подарки сильно отличаются по весу, по размеру они примерно одинаковые. Подарки любых двух человек вместе помещаются в маленькую коробку, любых трех — в среднюю (а в маленькую не помещаются), а всех четырех — только в большую. Если какой-то набор подарков помещается в определенную коробку, то он помещается и в коробку большего размера.

Стоимость почтовых отправлений определяется по формулам нелинейного ценообразования. А именно, если кто-то хочет отправить посылку в маленькой коробке, то он должен заплатить 2000 рублей, а также по 1000 рублей за каждый килограмм веса содержимого коробки. Отправка посылки в средней коробке стоит 8000 рублей плюс 500 рублей за каждый килограмм содержимого. Отправка посылки в большой коробке стоит 18 500 рублей, но зато дополнительно ничего платить не нужно. Цена самой коробки в каждом случае включена в стоимость отправления.

Ребята думают, как им распределить посылки по коробкам и кто сколько должен заплатить. Распределение посылок и оплаты, которое их интересует, должно удовлетворять двум свойствам:

- *эффективность:* люди, которые упаковывают свои подарки в одну коробку, в сумме платят столько, сколько стоит отправка этой коробки;
- *рациональность:* никто из участников не платит больше, чем заплатил бы, если бы решил отправить посылку отдельно от остальных, а также нет такого набора участников, который мог бы упаковать свои подарки в одну коробку и заплатить меньше, чем платит при существующем распределении.

Предложите распределение, удовлетворяющее обоим свойствам, и докажите, что оно им удовлетворяет.

### *Решение*

Составим систему возможных платежей. Для простоты обозначим сумму, которую должен платить человек, первой буквой его имени ($A$, $B$, $V$ и $G$).

Запишем неравенства, которые гарантируют рациональность:

| 1 человек | 2 человека | 3 человека | 4 человека |
|---|---|---|---|
| $A \leqslant 3$ | $A + B \leqslant 6$ | $A + B + V \leqslant 12{,}5$ | $A + B + V + G \leqslant 18{,}5$ |
| $B \leqslant 5$ | $A + V \leqslant 8$ | $A + B + G \leqslant 14$ | |
| $V \leqslant 7$ | $A + G \leqslant 11$ | $A + V + G \leqslant 15$ | |
| $G \leqslant 10$ | $B + V \leqslant 10$ | $B + V + G \leqslant 16$ | |
| | $B + G \leqslant 13$ | | |
| | $V + G \leqslant 14{,}5$ | | |

При этом $A + B + V + G = 18{,}5$, поскольку способа отправить все четыре отправления дешевле нет.

Из четырех неравенств в столбце «3 человека» следует

$$G \geqslant 6, \qquad V \geqslant 4{,}5, \qquad B \geqslant 3{,}5, \qquad A \geqslant 2{,}5.$$

С учетом ограничения $A + B \leqslant 6$ должно быть выполнено $B = 3{,}5$ и $A = 2{,}5$. Подставив эти значения в другие неравенства, получаем

| 1 человек | 2 человека | 3 человека | 4 человека |
|---|---|---|---|
| $A = 2{,}5$<br>$B = 3{,}5$<br>$V \leqslant 7$<br>$G \leqslant 10$ | $A + B = 6$<br>$V \leqslant 5{,}5$<br>$G \leqslant 8{,}5$<br>$V \leqslant 6{,}5$<br>$G \leqslant 9{,}5$<br>$V + G \leqslant 14{,}5$ | $V \leqslant 6{,}5$<br>$G \leqslant 8$<br>$V + G \leqslant 12{,}5$<br>$V + G \leqslant 12{,}5$ | $V + G = 12{,}5$ |

Оставив только самые сильные условия, получаем систему:

$$\begin{cases} A = 2{,}5, \\ B = 3{,}5, \\ V \leqslant 5{,}5, \\ G \leqslant 8, \\ V + G = 12{,}5. \end{cases}$$

Чтобы эффективность тоже была выполнена, можно отправить все 4 подарка в большой коробке и сделать, например, $V = 5$ и $G = 7{,}5$ или другие значения, удовлетворяющие системе условий.

## *Схема оценивания*

Баллы в решении ставятся за предъявление примера распределения и доказательство, что пример удовлетворяет условиями — выводить набор правил, которым должно уведомлять распределение, необязательно.

При решении через выведение набора правил (или при проверке того, что ответ подходит) по **1 баллу** ставится за проверку групп численностью 1, 3 и 4. **2 балла** ставятся за проверку групп численности 2 (или 1 балл в случае не более чем одной ошибки). **1 балл** ставится за обоснование правой части неравенств.