Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Заключительный этап

Москва, 14—19 апреля 2018 года

10-11-й класс
Второй тур

Дата написания	**16 апреля 2018 г.**
Количество заданий	**4**
Сумма баллов	**24**
Время написания	**180 минут**

Решения

Составители написали приведенные ниже решения более подробно, чем если бы им самим пришлось участвовать в олимпиаде. Данный документ содержит пояснения, примечания, альтернативные способы решений, которые предназначены исключительно для информирования жюри, а также всех, кто будет разбирать эти задачи в дальнейшем при изучении экономики или подготовке к олимпиадам. От участников не требуется слишком подробного решения; в любом случае самое важное при оценке — понимает ли участник, как решается задача.

Задача 5. Гипотеза перманентного дохода **(6 баллов)**

Согласно гипотезе перманентного дохода Милтона Фридмена (*permanent income hypothesis*, PIH), предложенной в 1957 году, уровень потребительских расходов человека зависит не столько от его текущего дохода, сколько от его *перманентного дохода* — некоторого ожидаемого среднего уровня доходов в будущем. Таким образом, человек, имеющий небольшой доход сейчас, но ожидающий его рост в будущем, потребляет больше (к примеру, молодой человек с хорошими карьерными перспективами), а человек с большим доходом, ожидающий его падения — меньше (к примеру, немолодой человек, собирающийся в скором времени выходить на пенсию).

Одним из известных следствий PIH является сглаживание потребления — сравнительно высокая стабильность расходов человека на потребление даже в условиях значительно изменяющегося текущего дохода.

а) **(2 балла)** По некоторым оценкам, сглаживание потребления значительно более свойственно богатым домохозяйствам, чем бедным. Укажите две возможные причины этого явления (если укажете больше, проверены будут первые две).

б) **(4 балла)** За последние десятилетия было предпринято много попыток подтвердить или опровергнуть гипотезу перманентного дохода на основе реальных данных. Объясните, каким образом можно было бы проверить эту гипотезу на каждом из приведенных ниже наборов данных, а также какие недостатки могут быть у их использования:

- Данные по доходам и расходам на продукты питания 2000 домашних хозяйств. Для каждого из домохозяйств есть данные за 7 лет.
- Ежегодный опрос домохозяйств по очень широкому кругу вопросов, включая доходы и расходы на разные группы товаров. 7 лет, 2000 домохозяйств, но в отличие от предыдущего случая каждый год опрашиваются новые домохозяйства.

Решение

а) **Принимаются** следующие аргументы (не более двух):

- Богатые тратят меньшую долю дохода на потребление и поэтому имеют больше возможностей сберегать;
- богатым доступнее кредиты и они могут компенсировать снижение доходов кредитом;
- Финансовая грамотность: богатые могут быть более финансово грамотны, поэтому у них больше возможностей длЯ прогнозированиЯ своих доходов и меньше ошибка прогноза.

Не принимаются следующие аргументы:

- У богатых больше сбережений, поэтому они сглаживают (если не объясняется, откуда сбережения);
- у бедных более волатильная зарплата или больше рисков (это учтено при построении ожиданий);
- бедные на что-нибудь копят, а потом резко увеличивают траты (у богатых тоже есть цели для накоплений)
- у богатых и так всё есть, или они достигли оптимального уровня потреблени, или они привыкли к своему потреблению.

б) • Как: посмотреть на динамику доходов и расходов. Если волатильность расходов больше, то гипотеза выполняется. Либо если за повышением потребления следует повышение дохода (оба изменения перманентные). Минусы: расходы на продукты питания слабо эластичны по доходам, поэтому они могут быть относительно стабильны не из-за сглаживания потребления. Кроме того, не учитываются другие факторы, которые могли повлиять и на сглаживание, и на доход.

- Как: с использованием различных показателей, которые у нас есть, можем найти похожие домохозяйства и объединить их в группы. Можем применить метод из предыдущего случая для среднего потребления и дохода по всем домохозяйствам или по их группам. Минус: домохозяйства различаются, и даже схожие по многим показателям домохозяйства могут принимать разные решения, поэтому мы можем получить неверную оценку.

Схема оценивания

а) (2 балла) По 1 баллу за каждый корректный аргумент (не более 2).

б) (4 балла) По 2 балла за каждый набор данных, в каждом из них 1 балл за способ проверки гипотезы и 1 балл за недостатки использованиЯ именно таких данных. Общие рассуждения о различии корреляции и причинно-следственной связи баллов не приносят.

Задача 6. Здоровье не роскошь? **(6 баллов)**

В каждом периоде индивид распределяет свой доход $y > 1$ между расходами на здоровье, h, и расходами на остальные потребительские товары, c. (К расходам на здоровье можно отнести не только покупку лекарств и оплату услуг врачей, но и время, потраченное на занятия спортом, и т. д). Для простоты предположим, что доход потребителя, а также его выбор c и h не меняются от периода к периоду. Полезность индивида от потребления в каждом периоде равна $u(c) = 1 - \frac{1}{c}$. Расходы же индивида на здоровье увеличивают ожидаемую продолжительность его жизни. Предположим, что эта зависимость линейна: если индивид будет тратить на здоровье h в каждом периоде, то он проживет, в среднем, Ah периодов, где $A > 0$ — константа. Его суммарная полезность составит, таким образом, $Ah \cdot u(c)$.

а) **(2 балла)** Найдите оптимальное распределение дохода $y > 1$ между h и c.

б) **(2 балла)** Предположим, в стране А величина y больше, чем в стране В, а больше эти страны ничем не отличаются. В какой стране больше доля расходов на здоровье в бюджете индивида? Учитывая ваш ответ на этот вопрос, как можно классифицировать здоровье (в данной модели) с точки зрения экономической теории?

в) **(2 балла)** На протяжении второй половины XX века доля всех расходов на здравоохранение в ВВП росла практически во всех странах (например, в США она выросла с 5 % в 1950 г. до 15 % в 2000 г.) Этому феномену даются разные объяснения, среди которых, например, экзогенное возникновение дорогостоящих медицинских технологий, старение населения или даже рост монополизации сферы здравоохранения. Некоторые экономисты, однако, склонны считать ключевым объяснение, основанное на модели, которую вы рассмотрели в данной задаче. Приведите это объяснение в общих чертах.

Решение

а)

$$\begin{cases} U(c,h) = Ah \cdot \left(1 - \frac{1}{c}\right) \to \max \\ h = y - c \end{cases}$$

Подставив ограничение в целевую функцию, получим функцию одной переменной, которую можно максимизировать, например, с помощью производной:

$$u(c) = A(y-c)\left(1 - \frac{1}{c}\right) = A\left(y - c - \frac{y}{c} + 1\right),$$

$$u'(c) = A\left(-1 + \frac{y}{c^2}\right).$$

Производная убывает по c, значит, критическая точка будет максимумом. Приравнивая производную к нулю, находим $c^\star(y) = \sqrt{y}$, откуда $h^\star(y) = y - \sqrt{y}$.

Примечание. Максимизировать функцию $u(c)$ можно и без производной. Заметим, что если отбросить не влияющие на решение константы, максимизация $u(c)$ будет эквивалентна максимизации выражения $-c - \frac{y}{c}$ или, что то же самое, минимизации выражения

$$\frac{c + \frac{y}{c}}{2}.$$

Это выражение — не что иное, как среднее арифметическое чисел c и $\frac{y}{c}$, а среднее геометрическое этих чисел равно $\sqrt{y}$. Как известно, среднее арифметическое не меньше, чем среднее геометрическое тех же чисел, то есть

$$\frac{c + \frac{y}{c}}{2} \geqslant \sqrt{y}.$$

Заметим, что если $c = \sqrt{y}$, то среднее арифметическое и среднее геометрическое равны, то есть среднее геометрическое достигает своего минимального значения, что нам и требовалось.

б) Доля расходов на здоровье равна $h^{\star}(y)/y = 1-1/\sqrt{y}$, то есть растет по доходу. Значит, в стране А доля расходов на медицину в доходе будет выше, чем в стране Б. (Само по себе указание на то, что с ростом дохода растет величина расходов на здравоохранение, не является ответом на поставленный вопрос).

Таким образом, эластичность спроса на здоровье по доходу больше единицы; в данном случае здоровье является, с точки зрения экономической теории, товаром роскоши. (Классификация здоровья как нормального блага является верным, но не полным, поэтому, наравне с отсутствием классификации вообще, приводит к потере одного балла).

в) Во второй половине XX века имел место экономический рост, то есть рост ВВП на душу населения. Если индивиды имеют предпочтения, согласующиеся с рассмотренной моделью, оптимальная доля расходов на здоровье в доходе каждого индивида должна вырасти. Значит, и доля расходов на здоровье в ВВП должна вырасти. Общие рассуждения, не касающиеся конкретных трендов второй половины XX века, не могут быть засчитаны как ответ на данный вопрос. Кроме того, жюри может снять баллы за отсутствие отсылки к модели из предыдущих пунктов задачи или ошибки в логике рассуждения.

Необходимо отметить, что в данной задаче каждый следующий пункт содержательно базируется на предшествующих, поэтому ошибка в одном из пунктов практически неизбежно приводит к потере баллов в следующих частях задачи.

Схема оценивания

а) (2 балла) Полный балл ставится за корректную максимизацию любым способом.

б) (2 балла) Если участник рассуждает о величине h, а не h/y, баллы не ставятся. Если ответ на вопрос про долю расходов верен, а классификация блага отсутствует или ошибочна, ставится 1 балл.

в) (2 балла) Если рассуждения не связаны с величиной h/y, баллы не ставятся. Логическая ошибка приводит к снятию 1 или 2 баллов в зависимости от наличия противоречий с предыдущими рассуждениями.

Задача 7. Мед и хлопья (10—11) **(6 баллов)**

На левом (L) и правом (R) берегах Молочной реки живут 160 и 200 человек соответственно, которые потребляют на завтрак только блюдо «Хлопья с медом», приготовленное по старинным рецептам. Каждый житель любит такие завтраки и готов их съесть чем больше, тем лучше.

Рецепты на разных берегах отличаются. Жителям Левого берега одного литра меда хватает на 50 порций кукурузных хлопьев, в то время как жители Правого любят менее сладкие хлопья и одного литра им хватает на 100 порций. Иными словами, если y — это объем кукурузных хлопьев, измеряемый в порциях, а b — объем меда в литрах, то $y_L = 50b_L$ и $y_R = 100b_R$. Чтобы сделать порцию завтрака, нужно смешать кукурузные хлопья с медом непременно в заданной пропорции и добавить молоко.

Молоко у жителей есть в неограниченном количестве, а мед и хлопья нужно производить. Каждый житель может тратить свое рабочее время на пасеке или в кукурузном поле. Будем считать, что один пасечник может следить за одним ульем пчел, который производит 1 литр меда. Урожай кукурузы зависит от интенсивности опыления пчелами. Некоторые пчелы летают в том числе на другой берег и опыляют кукурузу там, поэтому ежемесячный урожай кукурузы на каждом берегу зависит от того, сколько пчел на обоих берегах:

$$y_L = (b_L + 0{,}25b_R) \cdot x_L,$$
$$y_R = (b_R + 0{,}25b_L) \cdot x_R,$$

где y — производство кукурузных хлопьев, b — количество ульев пчел, x — число рабочих, занятых в производстве кукурузных хлопьев (может быть нецелым). Индексы у всех переменных означают берег.

а) **(3 балла)** Пусть каждый регион независимо принимает решение о распределении труда между отраслями. Постройте графически кривую производственных возможностей каждого берега для какого-то фиксированного числа ульев на другом берегу. Назовем *равновесием* такое состояние, когда жители каждого берега не захотят менять распределение труда после того, когда узнают число ульев у другого берега. Сколько меда и хлопьев будет произведено в равновесии?

б) **(3 балла)** Предположим, два берега объединили усилия и совместно решают, как распределить трудовые ресурсы между пасеками и полями (при этом люди переплывать на другой берег не могут, но передавать мед и хлопья могут). Найдите общую границу производственных возможностей двух берегов. Покажите, что можно достичь большего числа завтраков для каждого берега по сравнению с пунктом **а)**.

Решение

а) Подставим ресурсные ограничения в производственные функции и получим КПВ:

$$y_L = (b_L + b_R/4)(160 - b_L)$$
$$y_R = (b_R + b_L/4)(200 - b_R)$$

Построим их графически:

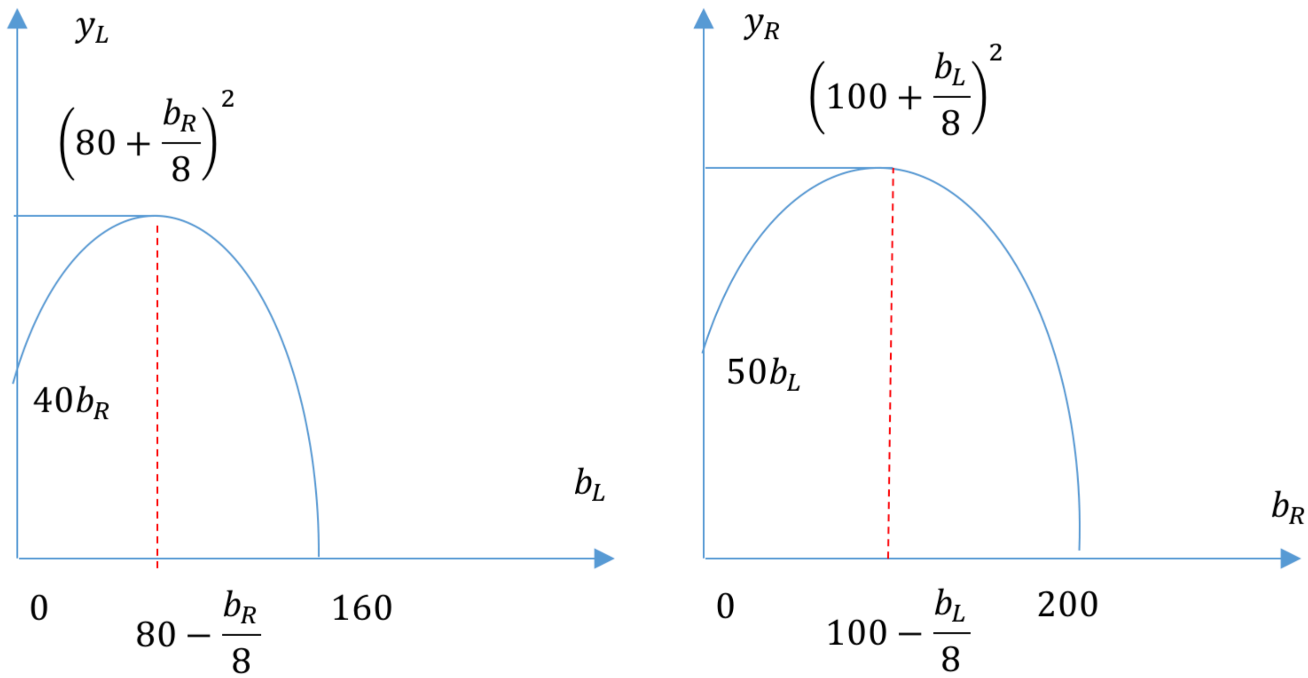

Рис. 7.1: КПВ отдельных берегов

У КПВ есть возрастающие участки. Если нам нужно не производственное множество, а множество наборов, доступных для потребления, то можно предположить, что каждый берег может легко утилизировать часть произведенного меда (на рисунке представлены оба варианта, в решении участников засчитывается любой).

Теперь найдем оптимальный выбор каждого берега. Прямые $y_L = 50b_L$ и $y_R = 100b_R$ (задаваемые рецептами из условия) пересекут КПВ на убывающих участках парабол. Например, для левого берега вершина параболы точно левее 80, а количество хлопьев при этом не меньше 6400. При этом на прямой лежит точка (80, 4000) — пересечение будет дальше от начала координат, чем она. Доказательство для правого берега аналогично.

Чтобы выбор обоих берегов составлял равновесие (по определению, данному в условии), оба равенства должны выполняться одновременно — иначе кому-то будет выгодно поменять свое решение. Составим систему:

$$\begin{cases} 50b_L = -b_L^2 - \frac{b_L b_R}{4} + 40b_R + 160b_L \\ 100b_R = -b_R^2 - \frac{b_L b_R}{4} + 50b_L + 200b_R \end{cases}$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем $b_R^2 - b_L^2 + 60b_L - 60b_R = 0$, или $(b_R - b_L)(b_L + b_R - 60) = 0$. Можем исключить ситуацию $b_L + b_R = 60$, так как из рассуждений выше $b_L > 80$ и $b_R > 100$. Подставляем $b_R = b_L$ и получаем $b_R = b_L = 120$, тогда $y_L = 6000$ и $y_R = 12000$.

б) Просуммируем два уравнения КПВ

$$y = -b_L^2 - \frac{b_L b_R}{4} + 40b_R + 160b_L - b_R^2 - \frac{b_L b_R}{4} + 50b_L + 200b_R \quad (7.1)$$

$$y = -b_L^2 - \frac{b_L b_R}{2} + 240b_R + 210b_L - b_R^2 \quad (7.2)$$

Заменим $b_L = b - b_R$ и упростим:

$$y = -b^2 - b_R^2 + 2bb_R - \frac{b \cdot b_R}{2} + \frac{b_R^2}{2} + 240b_R + 210b - 210b_R - b_R^2 \quad (7.3)$$

$$y = -\frac{3}{2}b_R^2 + \left(30 + \frac{3}{2}b\right)b_R - b^2 + 210b \quad (7.4)$$

Это парабола с ветвями вниз относительно b_R. Чтобы оптимизировать производство, нужно таким образом производить мед на берегах, чтобы больше всего получилось хлопьев. Вершина параболы в точке $b_R = b/2 + 10$, при этом $b_L = b/2 - 10$. Это имеет экономический смысл только при $20 \leqslant \leqslant b \leqslant 340$. При $b < 20$ имеем $b = b_R$, при $b \geqslant 340$ имеем $b_L = 160$ и $b_R = b - 160$.

Подставляем средний участок и получаем $y = -\frac{5}{8}b^2 + 225b + 150$. Вершина параболы в точке 180 (значение функции будет равно 20400).

При $b < 20$ получаем $y = 240b - b^2$, а при $b \geqslant 340$: $y = 480b - b^2 - 43200$.

Покажем, что можно произвести больше. В пункте а было 240 меда и 18000 хлопьев. Здесь же при 240 единиц меда можно произвести 18150 единиц хлопьев. А значит, если произвести чуть меньше хлопьев и чуть больше меда, производство обоих товаров (и сделанных из них завтраков) увеличится по сравнению с пунктом **а)**.

Схема оценивания

а) (3 балла) Схема проверки представлена в таблице:

Найдена и построена КПВ для каждого берега	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Выбор каждого берега на параболе		Есть	Есть	Есть	Есть
Обоснование выбора на убывающем участке или попытка рассмотреть все случаи		Есть		Есть	
Понимание равновесия как системы (с записью)			Есть	Есть	Есть
Решение системы					Есть
Баллы	**1**	**2**	**2**	**2**	**3**

При отсутствии графика снимается 1 балл.

б) (3 балла)

- **1 балл**: записана сумма КПВ и сделана попытка решения (попытка избавиться от параметров).
- **1 балл**: получена новая КПВ.
- **1 балл**: обоснование, что можно получить больше завтраков, чем в пункте **а)**.

Задача 8. Лаконичный Джини **(6 баллов)**

В некой стране 60 % наиболее бедного населения получает 30 % национального дохода. Других данных о распределении доходов нет. Найдите множество значений, которые может принимать коэффициент Джини в данной стране.

Решение

Кривая Лоренца и коэффициент Джини Напомним, что *кривой Лоренца* называется график функции, которая показывает, какой долей совокупного дохода владеет доля x беднейшего населения. Коэффициент Джини может определяться следующим образом:

$$G = \frac{S_L}{S_L + S_U} = 2S_L = 1 - 2S_U,$$

где S_U — площадь под кривой Лоренца, S_L — площадь фигуры, заключённой между кривой Лоренца и прямой $y = x$, см. рис. 8.1.

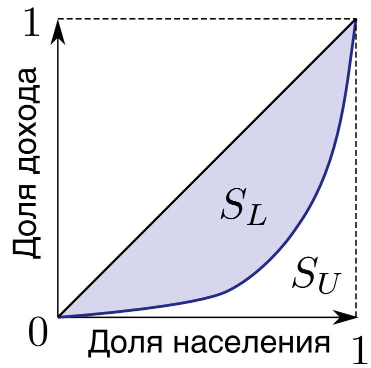

Рис. 8.1: Кривая Лоренца

По определению, любая кривая Лоренца проходит через точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$. По условию задачи, она также проходит через точку $(0{,}6; 0{,}3)$. По сути, задача состоит в том, чтобы из всех кривых Лоренца, проходящих через эти три точки, найти кривые с наименьшим и набольшим коэффициентами Джини, и рассчитать эти коэффициенты. Ключевое свойство кривой Лоренца, которым мы будем пользоваться: она выпукла вниз, то есть для неё верно два эквивалентных утверждения:

1. любой отрезок, соединяющий две точки на этой кривой (*хорда*), лежит над ней;
2. для любой точки кривой существует *опорная прямая*, которая проходит через эту точку и лежит под кривой. Для тех точек, в которых кривая гладкая, опорная прямая совпадает с касательной.

Оценка снизу Рассмотрим ломаную OAB, где O — начало координат, $A = (0{,}6, 0{,}3)$, $B = (1, 1)$, см. рис. 8.2. Любая кривая Лоренца, удовлетворяющая условию задачи, проходит ниже этой ломаной, поскольку OA и AB являются хордами (см. свойство 1). Следовательно, $G \geqslant 2S_{\triangle OAB} = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$. При этом ломаная OAB сама является кривой Лоренца. Следовательно, оценка достигается.

Оценка сверху Рассмотрим произвольную кривую Лоренца, проходящую через точку A. Проведём опорную прямую для этой кривой, проходящую через A (см. свойство 2). Пусть $Q = (1; 0)$ и опорная прямая пересекает отрезок OQ в точке W и отрезок QB в точке Z, см. рис. 8.3. (Она не может

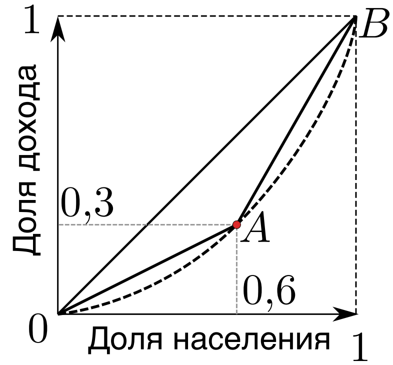

Рис. 8.2: Конструкция для оценки снизу

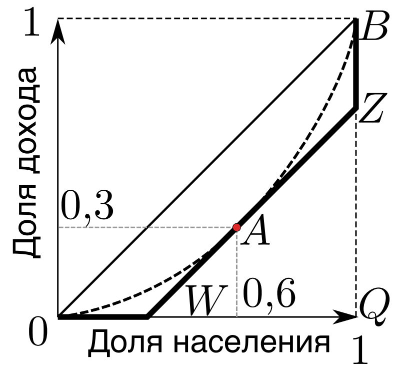

Рис. 8.3: Конструкция для оценки сверху

пересечь горизонтальную ось левее точки O, поскольку точка O обязана лежать на кривой Лоренца и значит должна быть выше опорной прямой, следовательно, точка W существует; аналогично доказывается существование точки Z.) По определению опорной прямой, наша кривая Лоренца проходит не выше ломаной $OWZB$. Следовательно, $G \leqslant 2S_{OWZB} = 1 - 2S_{\triangle WQZ}$.

Найдём среди всех таких ломаных ту, которая максимизирует площадь четырёхугольника $OWZB$, или, что то же самое, минимизирует площадь треугольника WZQ.

Пусть $R = (0{,}6; 0)$ и $S = (1; 0{,}3)$, см. рис. 8.4. Прямоугольник $RASQ$ не меняется, то есть нам нужно минимизировать совокупную площадь треугольников $\triangle ASZ$ и $\triangle WRA$. Они подобны. Обозначим $|SZ| = x$, $|WR| = y$. Из подобия треугольников имеем:

$$\frac{x}{0{,}4} = \frac{0{,}3}{y} \tag{8.1}$$

$$y = \frac{0{,}12}{x} \tag{8.2}$$

Оптимизационная задача принимает вид

$$\frac{1}{2}(0{,}4x + 0{,}3y) = 0{,}4x + 0{,}3\frac{0{,}12}{x} = 0{,}4x + \frac{0{,}036}{x} \to \min$$

при ограничениях $0 \leqslant x \leqslant 0{,}7$, $0 \leqslant y \leqslant 0{,}6$.

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим даёт:

$$0{,}4x + \frac{0{,}036}{x} \geqslant 2\sqrt{0{,}4x \times \frac{0{,}036}{x}} = 0{,}24$$

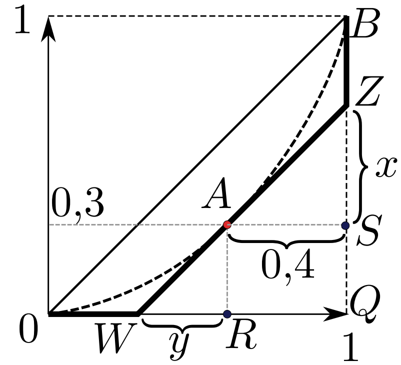

Рис. 8.4: Постановка оптимизационной задачи

Экстремум достигается, когда неравенство обращается в равенство, то есть

$$0{,}4x^2 - 0{,}24x + 0{,}036 = 0.$$

Решение: $x = 0{,}3$, $y = \frac{0{,}12}{0{,}3} = 0{,}4$. Ограничения $0 \leqslant x \leqslant 0{,}7$, $0 \leqslant y \leqslant 0{,}6$ выполняются.

При этом

$$S_{\triangle WQZ} = \frac{1}{2}(0{,}3 + 0{,}3) \times (0{,}4 + 0{,}4) = \frac{1}{2} \times 0{,}48$$

Таким образом, коэффициент Джини не может быть больше, чем $G_{max} = 1 - 2S_{\triangle WQZ}1 - 0{,}48 = 0{,}52$.

При этом ломаная *OWZB* — сама кривая Лоренца (если разрешить ей иметь вертикальные участки; если не разрешать, можно построить кривую, которая будет сколь угодно близка к ней). Следовательно, оценка достигается (или по крайней мере достигается сколь угодно близкое число).

Итак, ответ: *G* может принимать все значения из множества $[0{,}3,\ 0{,}52)$. (Включение правой границы зависит от того, разрешается ли кривой Лоренца иметь вертикальные участки, при проверке засчитывается как ответ, включающий правую границу, так и не включающий её. Любое промежуточное значение достигается из соображений непрерывности.)

Схема оценивания

Найдена оценка снизу Всего **2 балла**. За обоснование $G \geqslant 2S_{\triangle 0AB}$ ставится **1 балл**, за верный ответ ещё **1 балл**, баллы суммируются. При этом в качестве корректных обоснований принимаются соображения о выпуклости или эквивалентные им рассуждения, и не принимаются голословные утверждения вида «минимальное неравенство для двух групп будет при равномерном распределении внутри группы, следовательно, всё общество будет делиться на группы до 0,6 и после с равномерным распределением внутри». Действительно, непонятно, почему это так, почему группы две, почему именно такие?

Найдена оценка сверху Всего **4 балла**, за каждое из следующих продвижений ставится **1 балл**, баллы суммируются:

- Доказано, что $G \leqslant 2S_{OWZB}$.
- Поставлена оптимизационная задача в параметрической форме.
- Решена оптимизационная задача и получен правильный ответ.
- Проверена корректность ответа: выполнение ограничений и достижимость верхней оценки.