Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по экономике

24 января 2017 года

Второй тур. Задачи. **Решения.**

Продолжительность работы — **140 минут**.

Максимальное количество баллов за задачи — **120**.
Каждая задача оценивается из **30 баллов**.

Уважаемые коллеги!

В этом документе вы найдете решения задач регионального этапа всероссийской олимпиады школьников по экономике 2017 года. Мы надеемся, что сами задания, а также процесс их проверки доставят вам удовольствие.

Хотелось бы напомнить, что при проверке задач нужно придерживаться схем, разработанных Центральной предметно-методической комиссией (ЦПМК) по экономике и приведенных в данном документе, а также «Требований к проведению регионального этапа по экономике в 2016/2017 учебном году» (раздел 3). Общие принципы проверки приведены в «Требованиях...» и в списке ниже:

1. Для проверки второго тура члены жюри делятся на рабочие группы, каждая рабочая группа проверяет одну задачу, один из членов рабочей группы назначается ее руководителем. Такое разделение труда (при котором отдельные члены жюри проверяют конкретные задачи, а не работы целиком) способствует одинаковому уровню требований к корректности решений, облегчает разрешение спорных случаев. Состав рабочих групп утверждается председателем или заместителем председателя жюри. В случае если некоторые рабочие группы завершают проверку своих задач раньше других, их участники могут присоединиться к другим рабочим группам.
2. При наличии возможности желательно организовать проверку каждой задачи в каждой работе не менее чем двумя членами жюри.
3. Жюри проверяет работы в соответствии со схемами проверки, разработанными ЦПМК. В случае наличия в работе участника фрагмента решения, которое не может быть оценено в соответствии со схемой проверки, жюри принимает решение исходя из своих представлений о справедливом оценивании, при возможности консультируясь с составителями заданий. Выполнение данного требования имеет исключительную важность, поскольку по итогам регионального этапа составляется единый рейтинг школьников по России, на основании которого определяется состав участников заключительного этапа.
4. Жюри оценивает только то, что написано в работе участника: не могут быть оценены комментарии и дополнения, которые участник может сделать после окончания тура (например, в апелляционном заявлении).

5. Фрагменты решения участника, зачеркнутые им в работе, не проверяются жюри. Если участник хочет отменить зачеркивание, он должен явно написать в работе, что желает, чтобы зачеркнутая часть была проверена. Если невозможно однозначно определить, хотел ли участник, чтобы фрагмент решения был проверен, этот фрагмент не проверяется.
6. Участник должен излагать свое решение понятным языком, текст должен быть написан разборчивым почерком. При этом жюри не снижает оценку за помарки, исправления, орфографические, пунктуационные и стилистические ошибки, недостатки в оформлении работы, если решение участника можно понять.
7. Все утверждения, содержащиеся в решении участника, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений участника. Участник может не доказывать общеизвестные утверждения. Вопрос определения общеизвестности находится в компетенции жюри, но в любом случае общеизвестными считаются факты, изучаемые в рамках школьной программы. Также, как правило, общеизвестными можно считать те факты, которые многократно использовались в олимпиадах прошлых лет и приводились без доказательств в официальных решениях. Все необщеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Решение, которое явно или скрыто опирается на не доказанные участником необщеизвестные факты, оценивается неполным баллом.
8. Участник может решать задачи любым корректным способом, жюри не повышает баллы за красоту и лаконичность решения, а равно не снижает их за использование нерационального способа. Корректным может быть решение, которое нестандартно и отличается по способу от авторского (приведенного в материалах составителей). Это требование тем более важно потому, что многие из талантливых детей мыслят нестандартно, а выявление именно талантливых участников входит в задачи олимпиадного движения.
9. Работа участника не должна оставлять сомнений в том, каким способом проводится решение задачи. При проверке жюри должно определить, какие способом проводится решение (часть решения), и ставить баллы в соответствии со схемой проверки данного способа. Если в решении есть фрагменты разных способов решения, то также выбирается одна схема проверки, баллы за разные способы не суммируются.

   Если участник излагает несколько решений задачи, которые являются разными по сути (и, возможно, приводят к разным ответам), и некоторые из решений являются некорректными, то жюри не обязано выбирать и проверять корректное решение.
10. Участник может вводить удобные ему обозначения переменных, которые не должны противоречить обозначениям в условии, но при этом не обязательно должны совпадать с обозначениями, принятыми в авторском решении.
11. Если в решении участника содержатся противоречащие друг другу суждения, то они, как правило, не оцениваются, даже если одно из них верное. Нарушение логических последовательностей (причинно-следственных связей), как прави-

ло, приводит к существенному снижению оценки.

12. В работе участника должно содержаться доказательство полноты и правильности его ответа, при этом способ получения ответа, если это не требуется для доказательства его полноты и правильности, излагать необязательно.
13. Штрафы, которые жюри присваивает за вычислительные ошибки, зависят от серьезности последствий этих ошибок. Вычислительная ошибка, которая не привела к существенному изменению дальнейшего решения задачи и качественно не изменила сути получаемых выводов, штрафуется меньшим числом баллов, чем вычислительная ошибка, существенно повлиявшая на дальнейшее решение.
14. Если задача состоит из нескольких пунктов, то участник должен четко обозначить, где начинается решение каждого пункта. Каждый фрагмент решения проверяется в соответствии с критериями проверки, разработанными для указанного участником пункта. Если в решении участника одного из пунктов задачи содержится фрагмент решения, который в соответствии со схемой оценивания может принести баллы за другой пункт задачи, жюри может не ставить эти баллы, если из решения неочевидно, что участник понимает применимость результатов к другому пункту. При решении пунктов задачи участник может ссылаться на собственные решения (ответы) к других пунктам или на общую часть решения, выписанную в начале.
15. Если ошибка была допущена в первых пунктах задачи и это изменило ответы участника в последующих пунктах, то в общем случае баллы за следующие пункты не снижаются, то есть они проверяются так, как если бы собственные результаты, которыми пользуется участник, были правильными. Исключением являются случаи, когда ошибки в первых пунктах упростили или качественно исказили логику дальнейшего решения и/или ответы — в этих случаях баллы за последующие пункты могут быть существенно снижены.
16. Если участник в своем решении опирается на метод перебора вариантов, то для получения полного балла должны быть разобраны все возможные случаи. Упущение хотя бы одного случая может привести к существенному снижению оценки (непропорциональному доле неразобранных случаев в общем их числе).
17. Если для решения участнику необходимы дополнительные предпосылки, то он должен их сформулировать. Дополнительные предпосылки при этом не должны менять смысл задачи и существенно сужать круг обсуждаемых в решении ситуаций по сравнению с тем, который задан в условии.

Составители написали приведенные ниже решения более подробно, чем если бы им самим пришлось участвовать в олимпиаде. Данный документ содержит пояснения, примечания, альтернативные способы решений, которые предназначены исключительно для информирования жюри, а также всех, кто будет разбирать эти задачи в дальнейшем при изучении экономики или подготовке к олимпиадам. От участников не нужно требовать слишком подробного решения — в любом случае руководствуйтесь здравым смыслом и старайтесь определить, действительно ли участник понимает, как решается задача.

При этом помните, что приведенные ниже схемы проверки и обозначенные выше принципы будут применяться сегодня во всех регионах; для сопоставимости результатов необходимо следовать им максимально четко. В случае если решение участника не укладывается в предложенную схему проверки, примите решение исходя из своего опыта и справедливости. В спорных случаях вы можете спросить совета у коллег из других регионов или у ЦПМК на странице
http://iloveeconomics.ru/olimp/region/2017/grading. Если ЦПМК посчитает нужным прояснить какие-либо аспекты авторских решений или схем проверки, она сделает это в день проведения этапа на той же странице, поэтому членам жюри из всех регионов рекомендуется следить за содержанием этой страницы при проверке работ.

Если вам потребуется неотложная консультация в день проведения регионального этапа, вы можете написать ЦПМК по экономике напрямую: region@iloveeconomics.ru.

Удачи!

ЦПМК по экономике, 2017 год

Задача 1. «Импортозамещение» *(30 баллов)*

$x_1 + y_1 = 190$
$2x_2 + y_2 = 80$
$3x_3 + y_3 = 90$
$4x_4 + y_4 = 140$

Мир состоит из четырех стран — Первой, Второй, Третьей и Четвертой; в них могут производиться два товара — Икс и Игрек. Уравнения КПВ четырех стран представлены в таблице. Товары во всех странах потребляются только в комплектах, состоящих строго из K единиц Игрека и одной единицы Икса.

Изначально страны свободно торгуют товарами. В равновесии производство товаров распределяется эффективно между странами, причем две страны производят только Икс, а две — только Игрек. Известно, что одна из четырех стран (назовем ее «страна **N**») экспортирует 100 единиц Игрека.

а) *(12 баллов)* Определите значение K. Какую страну мы обозначили буквой **N**?

б) *(6 баллов)* В стране **N** пришел к власти новый президент, основа программы которого — поддержка отечественного производителя и импортозамещение. Новый президент запретил импорт Икса, и страна перестала участвовать в мировой торговле. Определите, в какую сторону и на сколько единиц в результате этого изменилось потребление комплектов из K единиц Икса и единицы Игрека в данной стране.

в) *(12 баллов)* Определите, в какую сторону и на сколько единиц в результате событий пункта **б)** изменилось суммарное потребление комплектов в остальных странах. (Считайте, что после исключения страны **N** из торговли на мировом рынке установилось новое равновесие, и в нем производство товаров распределяется эффективно между торгующими странами.)

Решение.

а) Определить K можно *одним из двух способов.*

> Корректное решение любым способом приносит 9 баллов.

Способ 1. При эффективном распределении производства *товар производят те страны, в которых альтернативные издержки его производства минимальны.*

> **4 балла** за идею о сравнительном преимуществе.

В данном случае альтернативные издержки производства Икса равны 1, 2, 3 и 4 единицы Игрека в странах соответственно. *Значит, товар Икс производят страны 1 и 2, а товар Игрек — страны 3 и 4.* Таким образом, общее производство Икса равно $190 + 80/2 = 230$, общее производства Игрека равно $90 + 140 = 230$. Следовательно, товары потребляются в пропорции $1 : 1$, *то есть* $K = 1$.

> **2 балла** за корректный вывод о том, какие страны что производят.

> **3 балла** за расчет суммарного производства и определение K.

Способ 2. Тот же результат можно было получить, *построив суммарную КПВ* (Рис. 1.2). Точка на КПВ, в которой две страны производят только Икс — это вторая точка излома КПВ (если считать слева направо), ее координаты — (230; 230). Через нее и начало координат проходит прямая с наклоном 1 *(отсюда получается $K = 1$)*.

> Построение суммарной КПВ — **6 баллов**.

> **3 балла** за определение K.

В странах 1 и 2 производится Икс, и поэтому они не экспортируют Игрек. Страна 3 производит 90 единиц Игрека,

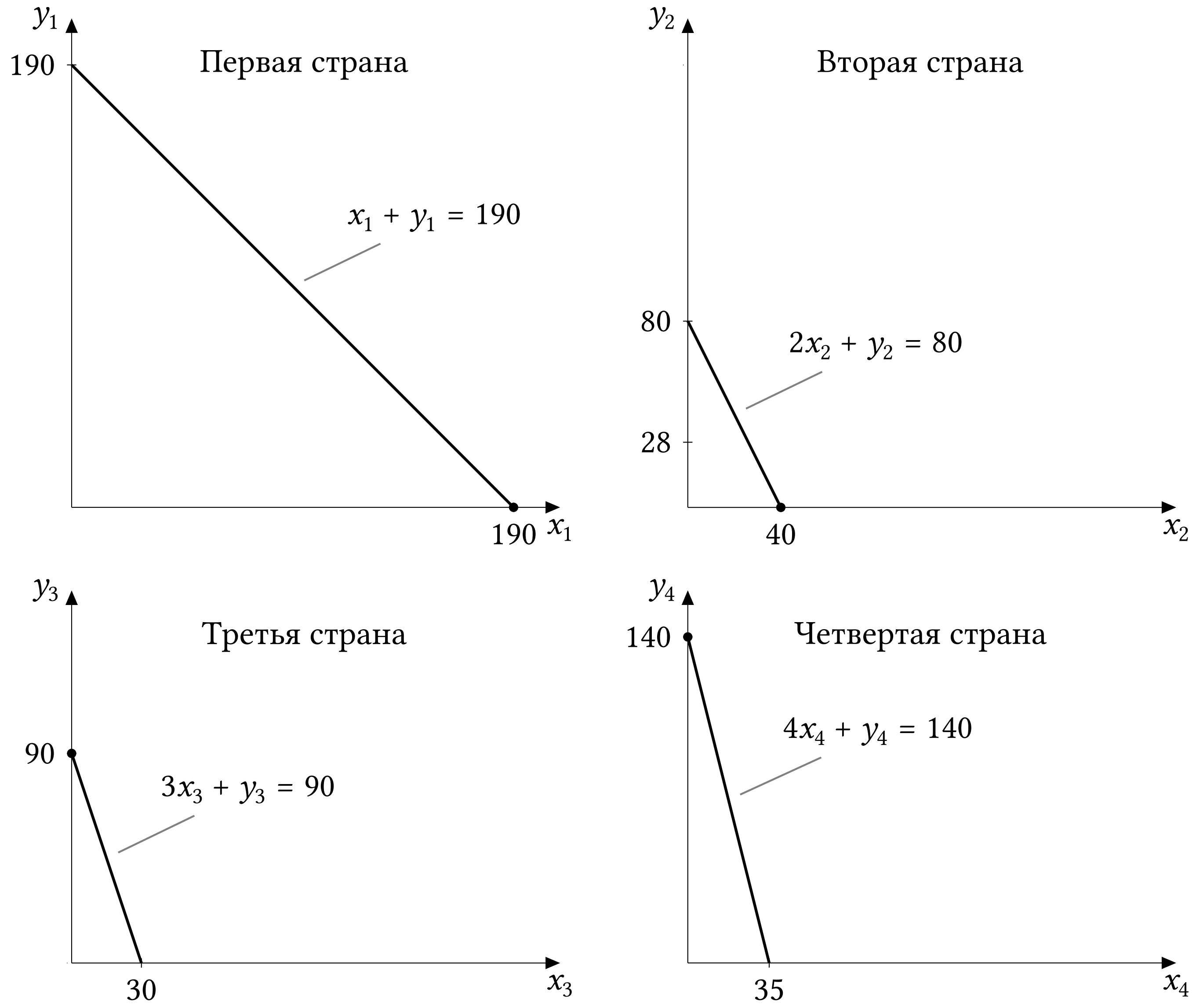


Рис. 1.1: Кривые производственных возможностей отдельных стран

и поэтому она не может экспортировать 100 единиц. *Значит, «страна **N**» — это страна 4.*

3 балла за определение **N**.

б) Поскольку страна 4 экспортирует 100 единиц Игрека и производит 140, *для домашнего потребления остается 40 единиц Игрека, а 40 единиц Икса импортируется*.

2 балла за корректный подсчет потребления в условиях торговли.

В отсутствие торговли (в условиях *автаркии*) страна 4 будет производить равное количество единиц Икса и Игрека (и потреблять столько же). Значит, $4x_4 + x_4 = 140$, откуда $x_4 = y_4 = 28$. В условиях торговли страна потребляла по 40 единиц Икса и Игрека. Значит, потребление комплектов из Икса и Игрека *сократилось на 12 единиц* (Рис. 1.3b).

3 балла за подсчет потребления в автаркии.

1 балл за правильный ответ.

Этот результат не должен вызвать удивления: *отказываясь от участия в торговле, страна лишает себя возможности покупать товар дешевле, чем ей обходится его производство.*

Если по приведенной выше схеме участник набрал меньше 2 баллов за пункт, но в решении на качественном уровне присутствует данная идея, то пункт оценивается в **2 балла**.

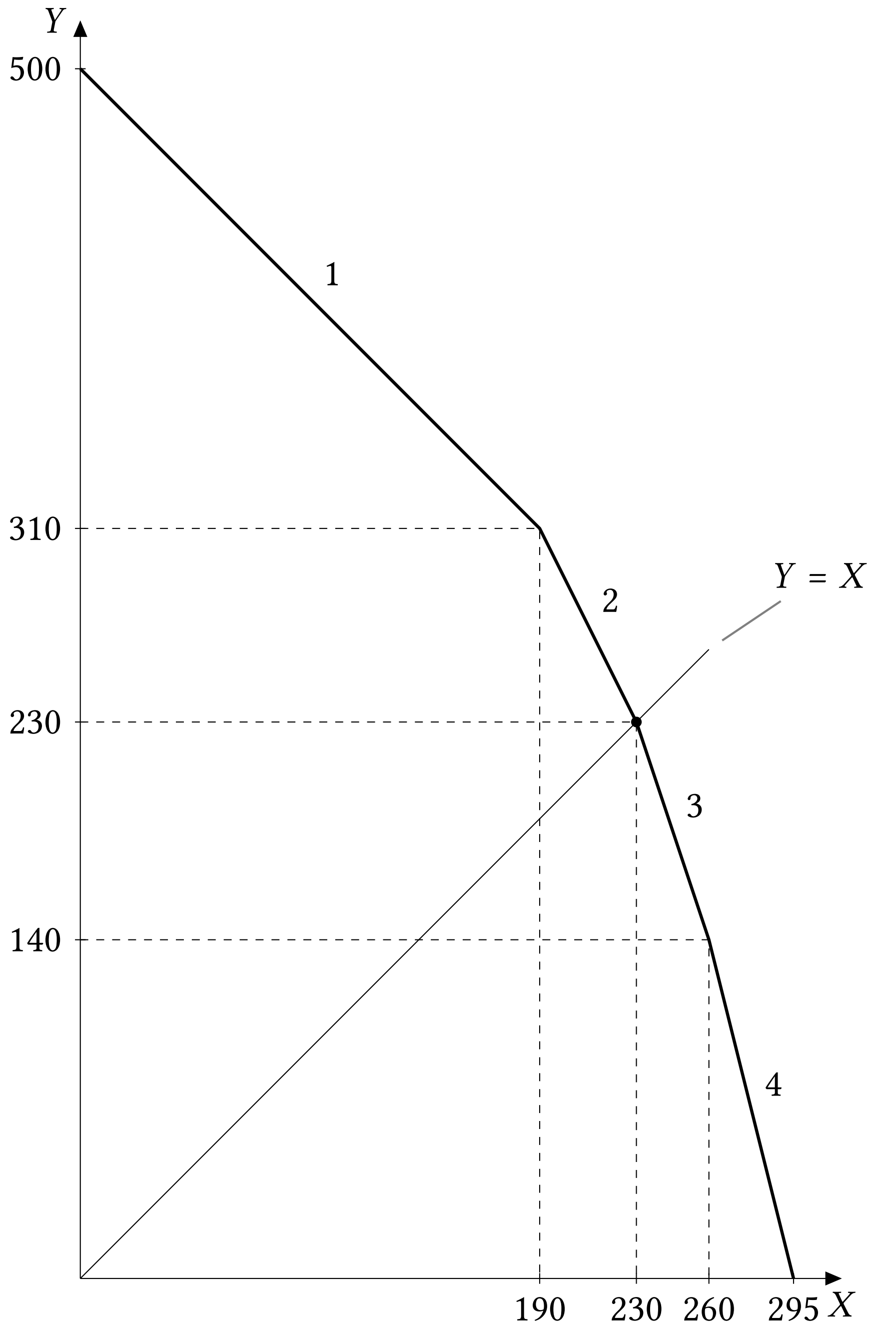
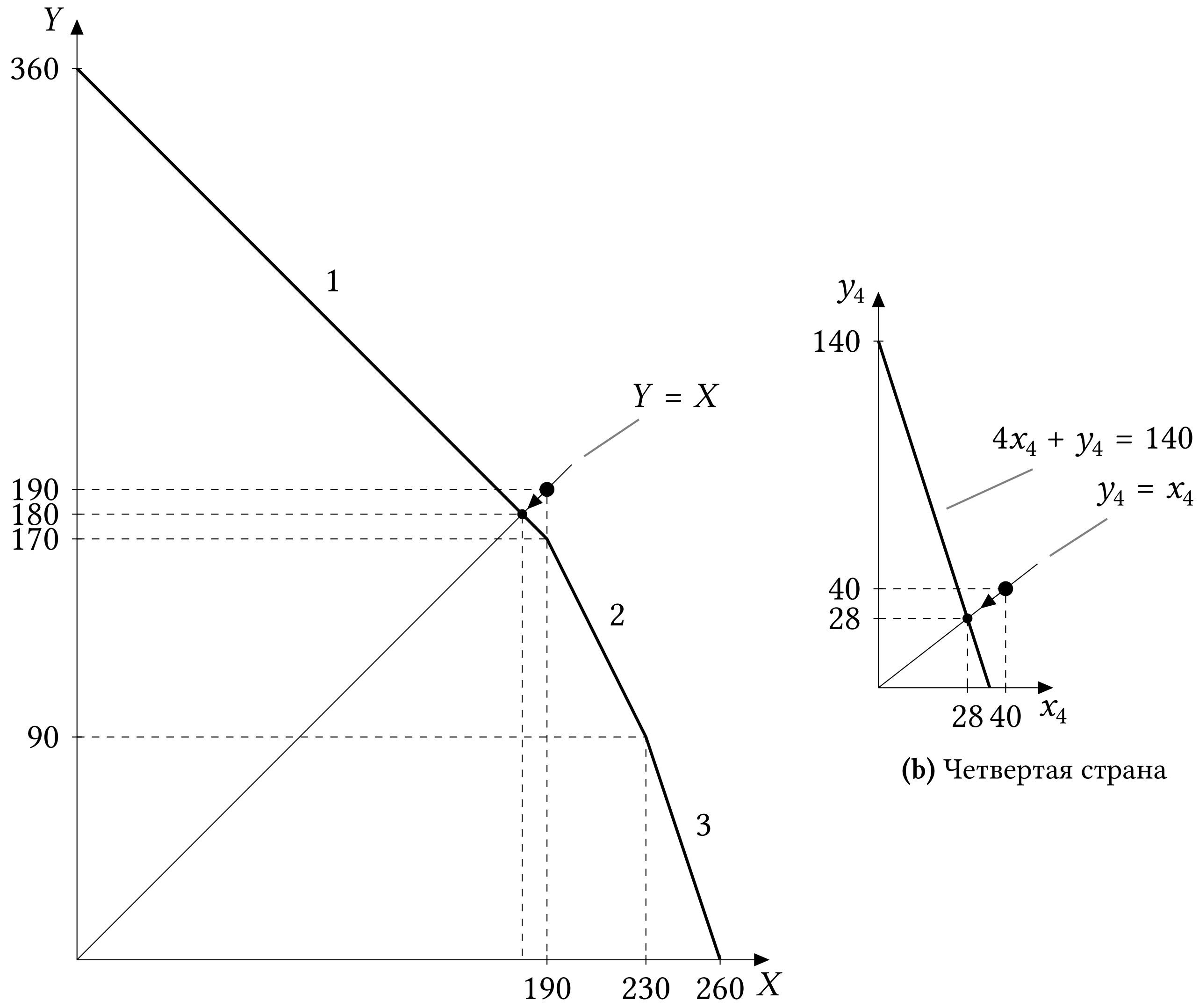


Рис. 1.2: Суммарная КПВ

в) В условиях торговли со страной 4 страны 1, 2 и 3 в сумме потребляли $230 - 40 = 190$ единиц Икса и Игрека. После исключения страны 4 из торговли объемы потребления будут определяться пересечением суммарной КПВ стран 1, 2 и 3 и прямой $Y = X$.

Суммарная КПВ стран 1, 2 и 3 является ломаной, соединяющей точки (0; 360), (190; 170), (230; 90), (260; 0), она представлена на Рис. 1.3а. Поскольку точка излома (190; 170) лежит ниже прямой $Y = X$, пересечение будет достигаться на первом участке КПВ. Первый участок описывается уравне-

Построение суммарной КПВ — **6 баллов**.



(a) Страны 1, 2, 3

(b) Четвертая страна

Рис. 1.3: В результате импортозамещения происходит переход потребления из точки побольше в точку поменьше

нием $Y = 360 - X$, значит, точка пересечения удовлетворяет уравнению $360 - X = X$, откуда $X = 180$. Значит, суммарное потребление комплектов из Икса и Игрека в трех странах уменьшилось на $190 - 180 = 10$ единиц.

5 баллов за поиск новой точки потребления.

1 балл за ответ.

Этот результат не должен вызвать удивления: *когда одна из стран отказалась от участия в торговле, остальные страны потеряли возможность покупать товар, в котором она имеет сравнительное преимущество.*

Если по приведенной выше схеме участник набрал меньше 4 баллов за пункт, но в решении на качественном уровне присутствует данная идея, то пункт оценивается в **4 балла**. В ином случае, как и в пункте **б)**, баллы за содержательное объяснение не ставятся, а ставятся только за расчеты.

Примечание: интересно, что страна 4 пострадала от собственной изоляции сильнее, чем все остальные страны вместе взятые ($12 > 10$), и уж тем более сильнее, чем какая-либо другая страна в среднем ($12 > 10/3$). Подумайте, выполняется ли это свойство всегда или его выполнение зависит от параметров модели.

Задача 2. «Консультанты» *(30 баллов)*

Знаменитая консалтинговая компания MBB занимается оптимизацией процессов на различных предприятиях, отправляя туда команды консультантов. Оптимизацию процессов на одном предприятии назовем *проектом* (пример проекта: улучшение структуры управления на металлургическом комбинате X). Проект длится один месяц. Консультанты бывают двух типов — опытные и неопытные. Для качественного выполнения проекта в срок можно поставить на проект либо двух опытных консультантов, либо одного опытного и трех неопытных (без одного опытного никак не обойтись, но в одиночку ему не справиться). Консультант может работать одновременно только над одним проектом.

Зарплата одного неопытного консультанта равна 100 тыс. руб. в месяц, и предложение их услуг на рынке не ограничено (выпускников экономических и математических факультетов — множество). Опытные же консультанты — редкий вид, их приходится с трудом переманивать из конкурирующих компаний, и поэтому найм каждого следующего обходится дороже. Чтобы нанять L опытных консультантов, фирме нужно затратить $L \cdot (240 + L)$ тыс. руб. в месяц.

Всего в следующем месяце фирма собирается выполнить Q проектов.

а) *(15 баллов)* Допустим, $Q = 25$. Сколько опытных и неопытных консультантов ей следует нанять, чтобы минимизировать издержки на выполнение проектов?

б) *(15 баллов)* При каких значениях Q фирма не будет нанимать неопытных консультантов?

Решение. В пункте **а)** приведено решение для произвольного Q, потому что это удобно для выводов пункта **б)**. Участник может решать первый пункт сразу для $Q = 25$, баллы за это не снижаются, схема проверки написана для решения при $Q = 25$. Решение для произвольного Q, выполненное в этом пункте, может принести баллы в пункте **б)**.

а) Пусть q_1 — количество проектов, на которые фирма будет ставить неопытных консультантов вместе с опытными, а q_2 — количество проектов, на которые фирма будет ставить только двух опытных консультантов, $q_1 + q_2 = Q$. Обозначим за l количество неопытных консультантов, за L — количество опытных. Тогда $l = 3q_1$, $L = q_1 + 2q_2$. Затраты компании на услуги труда консультантов равны

> **(1) 5 баллов** за формализацию задачи, включая выражение спроса на квалифицированный и неквалифицированный труд в зависимости от количества проектов двух типов, а также функции издержек в зависимости от затрат труда.

$$C = 100l + L \cdot (240 + L).$$

Нужно минимизировать эту функцию при ограничениях $l = 3q_1$, $L = q_1 + 2q_2$, $q_1 + q_2 = Q$. Эту задачу можно свести к задаче минимизации по одной переменной. Поскольку переменных у нас четыре (q_1, q_2, l и L), это можно сделать четырьмя способами.

Способ 1 (по q_1). Подставим выражения для l и L в целевую функцию:

$$C = 100l + L\cdot(240 + L) = 100\cdot 3q_1 + 240(q_1 + 2q_2) + (q_1 + 2q_2)^2.$$

Затем, подставляя $q_1 = Q - q_2$, получаем

(2) **4 балла** за получение целевой функции одной переменной.

$$C = 540(Q - q_2) + 480q_2 + (Q + q_2)^2 = q_2^2 - (60 - 2Q)q_2 + Q^2 + 540Q.$$

Фирма минимизирует значение этого выражения по q_2 на отрезке $[0; Q]$. Относительно q_2 это парабола с ветвями *вверх*, и поэтому минимум издержек достигается в ее вершине $q_2^\star = 30 - Q$, если $q_2^\star \in [0; Q]$. Тот же ответ можно получить, взяв производную функции по q_2 ($C' = 2q_2 - (60 - 2Q)$) и приравняв ее к 0. В этом случае можно заметить, что производная в критической точке меняет знак с − на + (варианты: первая производная возрастает, вторая производная равна 2, то есть положительна), так что это точка минимума.

(3) **5 баллов** за поиск оптимального q. Из них 1 балл снимается, если не проверено, что найден именно минимум (достаточное условие).

При $Q = 25$ имеем $q_2^\star = 30 - 25 = 5 \in [0; 25]$.

Способ 2 (по q_2). Подставим выражения для l и L в целевую функцию:

$$C = 100l + L\cdot(240 + L) = 100\cdot 3q_1 + 240(q_1 + 2q_2) + (q_1 + 2q_2)^2.$$

Затем, подставляя $q_2 = Q - q_1$, получаем

(2) **4 балла** за получение целевой функции одной переменной.

$$C = 540q_1 + 480(Q - q_1) + (2Q - q_1)^2 = q_1^2 + (60 - 4Q)q_1 + 4Q^2 + 480Q.$$

Фирма минимизирует значение этого выражения по q_1 на отрезке $[0; Q]$. Относительно q_1 это парабола с ветвями *вверх*, и поэтому минимум издержек достигается в ее вершине $q_1^\star = 2Q - 30$, если $q_1^\star \in [0; Q]$. Тот же ответ можно получить, взяв производную функции по q_1 ($C' = 2q_1 + (60 - 4Q)$) и приравняв ее к 0. В этом случае можно заметить, что производная в критической точке меняет знак с − на + (варианты: первая производная возрастает, вторая производная равна 2, то есть положительна), так что это точка минимума.

(3) **5 баллов** за поиск оптимального q. Из них 1 балл снимается, если не проверено, что найден именно минимум (достаточное условие).

При $Q = 25$ имеем $q_1^\star = 50 - 30 = 20 \in [0; 25]$.

Окончание способов 1 и 2. Значит, на 5 проектов фирма отправит только опытных консультантов, а на 20 — группы из 1 опытного и 3 неопытных консультантов. *Всего она наймет $l = 3q_1 = 60$ неопытных и $L = q_1 + 2q_2 = 30$ опытных консультантов.*

(4) **1 балл** за подсчет ответа

Способ 3 (по l). Выразим q_1 и q_2 через l и L. $q_1 = l/3$, и поэтому $L = q_1 + 2q_2 = l/3 + 2q_2$. Отсюда $q_2 = (L - l/3)/2$. Значит, ограничение $q_1 + q_2 = Q$ принимает вид $l/3 + (L - l/3)/2 = Q$, то есть $l/6 + L/2 = Q$. Отсюда $L = 2Q - l/3$. Подставляя это соотношение в целевую функцию, получаем

(2) 4 балла за получение целевой функции одной переменной.

$$C = 100l + L\cdot(240+L) = 100l + 480Q - 80l + (2Q - l/3)^2 = l^2/9 + (20 - 4Q/3)l + 480Q + 4Q^2.$$

Фирма минимизирует значение этого выражения по l на отрезке $[0; 6Q]$. Относительно l это парабола с ветвями *вверх*, и поэтому минимум издержек достигается в ее вершине $l^\star = 6Q - 90$, если $l^\star \in [0; 6Q]$. Тот же ответ можно получить, взяв производную функции по l ($C' = 2l/9 + (20 - 4Q/3)$) и приравняв ее к 0. В этом случае можно заметить, что производная в критической точке меняет знак с − на + (варианты: первая производная возрастает, вторая производная равна 2, то есть положительна), так что это точка минимума.

(3) 5 баллов за поиск оптимального q. Из них 1 балл снимается, если не проверено, что найден именно минимум (достаточное условие).

При $Q = 25$ имеем $l^\star = 150 - 90 = 60 \in [0; 6 \cdot 25]$. Получаем тот же ответ, что выше: *фирма наймет 60 неопытных и* $L^\star = 2 \cdot 25 - l^\star/3 = 30$ *опытных консультантов.*

(4) 1 балл за подсчет ответа

Способ 4 (по L). Аналогично способу 3, получаем, что $l/6 + L/2 = Q$. Отсюда $l = 6Q - 3L$. Подставляя это соотношение в целевую функцию, получаем

(2) 4 балла за получение целевой функции одной переменной.

$$C = 100l + L\cdot(240 + L) = L^2 + 240L + 100(6Q - 3L) = L^2 - 60L + 600Q.$$

Фирма минимизирует значение этого выражения по L на отрезке $[0; 2Q]$. Относительно L это парабола с ветвями *вверх*, и поэтому минимум издержек достигается в ее вершине $L^\star = 30$, если $L^\star \in [0; 2Q]$. Тот же ответ можно получить, взяв производную функции по L ($C' = 2L - 60$) и приравняв ее к 0. В этом случае можно заметить, что производная в критической точке меняет знак с − на + (варианты: первая производная возрастает, вторая производная равна 2, то есть положительна), так что это точка минимума.

(3) 5 баллов за поиск оптимального q. Из них 1 балл снимается, если не проверено, что найден именно минимум (достаточное условие).

При $Q = 25$ имеем $L^\star = 30 \in [0; 2 \cdot 25]$. Получаем тот же ответ, что выше: *фирма наймет 30 опытных консультантов и* $6 \cdot 25 - 3 \cdot 30 = 60$ *неопытных консультантов.*

(4) 1 балл за подсчет ответа

б) Будем руководствоваться ответами, полученными в предыдущем пункте для произвольного Q.

Если фирма не нанимает неопытных консультантов, то $q_1 = 0$, $q_2 = Q$, $l = 0$, $L = 2Q$ то есть q_1 и l должны лежать на левой границе допустимого интервала, а q_2 и L— на правой.

Если участник решал пункт **а)** сразу в общем виде, то баллы, полученные по критериям **(2)** и **(3)**, нужно удвоить. Если решение в общем виде впервые приведено в пункте **б)** (а пункт **а)** решается для случая $Q = 25$), то нужно проверить его по критериям **(2)** и **(3)** пункта **а)**.

Для этого вершина параболы, которую мы минимизировали в пункте **а)**, должна лежать или на соответствующей границе, *или за ней* (например, если получилось, что издержки минимизируются при $q_1 = 50$ и $q_2 = -10$, а при этом $Q = 40$, то нужно выбирать $q_1 = Q = 40$ и $q_2 = 0$).

В зависимости от способа решения пункта **а)** (которое может быть в общем виде приведено в пункте **б)**, если пункт **а)** решался для $Q = 25$) это будет или правая ($q_2 \geqslant Q$, $L \geqslant 2Q$), или левая ($q_1 \leqslant 0$, $l \leqslant 0$) граница найденного интервала.

5 баллов за корректное определение (с обоснованием) нужной границы (в зависимости от способа). Из них 2 балла снимается, если участник составляет не неравенство, а уравнение, то есть считает, что решение должно находиться *строго на границе*, и затем так и оставляет ответ $Q = 15$.

Решая соответствующее неравенство ($q_2 = 2Q - 30 \leqslant 0$ или $q_1 = 30 - Q \geqslant Q$ или $l = 6Q - 90 \leqslant 0$ или $L = 30 \geqslant 2Q$), во всех четырех случаях получаем $Q \leqslant 15$.

1 балл за подсчет ответа.

Значит, фирма не будет нанимать неопытных работников, если общее количество проектов не больше 15.

Примечание. Более реалистичной является многопериодная модель, в которой неопытные работники со временем приобретают опыт, и у фирмы возникает выбор: нанимать опытных сотрудников со стороны или «выращивать» их у себя. Однако если опытные сотрудники, получившие опыт внутри фирмы и опытные работники со стороны в среднем (1) обладают одинаковой квалификацией и (2) требуют одинаковую заплату, то более сложная модель сводится к простой модели, рассмотренной в данной задаче.

Задача 3. «Денег нет, но вы держитесь!» *(30 баллов)*

В закрытой экономике частное потребление равно $C = 50 + (2/3)Y_d$ млрд р., где Y_d — располагаемый доход. Инвестиции постоянны и равны 50 млрд р.

Доходы государственного бюджета состоят только от поступлений от подоходного налога, взимаемого с населения по ставке t за каждый заработанный рубль. Расходы бюджета — государственные закупки, определяемые правительством. В 2016 году из-за кризиса бюджет страны имел дефицит, поэтому председатель правительства сделал заявление о бюджете на следующий год:

> *Денег нет, но вы держитесь! В 2017 году наш бюджет будет сбалансирован. Чтобы достичь баланса, мы либо поднимем ставку подоходного налога в 2,5 раза, либо урежем госзакупки втрое. Всего доброго, хорошего настроения и здоровья!*

а) *(10 баллов)* Какую меру из предложенных двух должно выбрать правительство, если оно хочет, чтобы сокращение реального ВВП в 2017 году было меньше?

б) *(20 баллов)* На какую величину в результате сократится реальный ВВП?

Решение.

а) Способ 1. Пусть t — ставка налога в 2016 году, G — объем госзакупок, а Y_1 и Y_2 — значения ВВП при выборе первой и второй меры соответственно. Для сбалансированности бюджета в 2017 году нужно, чтобы доходы бюджета были равны расходам. В первом варианте это будет означать

$$2{,}5t \cdot Y_1 = G,$$

а во втором —

$$t \cdot Y_2 = G/3.$$

По 4 балла за составление каждого из уравнений баланса.

Отсюда получаем

$$Y_1 = \frac{G}{2{,}5t}, \qquad Y_2 = \frac{G}{3t}.$$

Отсюда ясно, что первая мера снижает ВВП не так сильно, как вторая.

2 балла за выражение значения Y и выбор меры.

Способ 2. Можно найти изменения ВВП при применении обеих мер непосредственно, а затем сравнить их. В первом случае новый ВВП должен получиться равным 400, а во втором — равным 1000/3 (решение приведено в пункте **б)**). Таким образом, участник может просто решить пункт **б)**, а выводы пункта **а)** будут следовать из него автоматически.

При таком способе решения **6 баллов** должно ставиться за составление корректной системы уравнений (3.1) (**по 1 баллу** за каждое уравнение), **2 балла** — за ее решение (возможно, неполное, но достаточное для сравнения Y_1 и Y_2) и **2 балла** — за сравнение Y_1 и Y_2.

б) Обозначим за Y_0 объем ВВП в 2016 году. Тогда выполнена система уравнений

$$\begin{cases} Y_0 = 50 + \frac{2}{3}(Y_0 - tY_0) + 50 + G \\ Y_1 = 50 + \frac{2}{3}(Y_1 - 2{,}5tY_1) + 50 + G \\ Y_2 = 50 + \frac{2}{3}(Y_2 - tY_2) + 50 + G/3 \\ 2{,}5t \cdot Y_1 = G \\ t \cdot Y_2 = G/3. \end{cases} \tag{3.1}$$

По 3 балла за каждое из уравнений системы. При этом система может быть приведена в пункте **а)**, в этом случае ее нужно оценить еще раз.

Первые три уравнения представляют собой формулу ВВП по расходам ($Y = C + I + G + X_n$), записанную для 2016 года и для двух вариантов развития событий в 2017 году. Остальные два уравнения являются условиями сбалансированности бюджета для двух рассматриваемых политик.

4 балла за любое корректное решение системы уравнений, **1 балл** за ответ. Если участник привел ответ для неправильно выбранной меры (то есть неверно решил пункт **а)**), то балл за ответ не ставится, а баллы за решение системы ставятся пропорцильнально продвижению в этом решении.

Решать эту систему можно, например, так.

1. Подставляя $2{,}5tY_1$ из четвертого уравнения во второе, получаем $Y_1 = 50 + \frac{2}{3}(Y_1 - G) + 50 + G$, откуда $Y_1 = 300 + G$. Подставляя tY_2 из пятого уравнения в третье, получаем, что $Y_2 = 50 + \frac{2}{3}(Y_2 - G/3) + 50 + G/3$, откуда $Y_2 = 300 + G/3$.

2. Деля четвертое уравнение на пятое (это можно делать, поскольку налог и госзакупки по условию существуют), получаем $Y_1/Y_2 = 6/5$, и значит, $5(300 + G) = 6(300 + G/3)$, откуда $G = 100$. Значит, $Y_1 = 400$. Из четвертого уравнения получаем, что $t = 10\ \%$.

3. Наконец, найдем ВВП в 2016 году из первого уравнения. Подставляя найденные значения ставки налога и госзакупок, получаем, что

$$Y_0 = 50 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}9Y_0 + 50 + 100,$$

откуда $Y_0 = 200/0{,}4 = 200 \cdot 2{,}5 = 500$.

Значит, сокращение ВВП при повышении ставки налога составит $Y_0 - Y_1 = 500 - 400 = 100$.

Задача 4. «Неравенство олигархов» *(30 баллов)*

Кривая Лоренца в стране А описывается уравнением $Y = X^2$; иными словами, доля $X \in [0; 1]$ наиболее бедного населения получает долю X^2 всего дохода общества.

а) *(12 баллов)* Назовем 10 % богатейших жителей страны *олигархами.* Выведите уравнение кривой Лоренца, отражающей распределение доходов *среди олигархов.* Иными словами, определите, какую долю y суммарного дохода всех олигархов получает доля x наиболее бедных олигархов. Что больше — степень неравенства доходов среди олигархов или степень неравенства доходов во всей стране? (Степень неравенства будем измерять с помошью коэффициента Джини.)

Проверьте себя: полученная вами кривая Лоренца (как и всякая кривая Лоренца) должна проходить через точки (0; 0) и (1; 1).

б) *(10 баллов)* В стране В кривая Лоренца описывается уравнением $Y = 1 - \sqrt{1 - X}$. Выведите уравнение кривой Лоренца, отражающей распределение доходов среди олигархов страны В (олигархами здесь также называются 10 % богатейших жителей). Что больше — степень неравенства доходов среди олигархов страны В или степень неравенства доходов во всей стране?

в) *(8 баллов)* Что больше — степень неравенства доходов среди 10 % богатейших или среди 1 % богатейших жителей страны В? Среди 1 % богатейших или среди 0,1 % богатейших жителей страны В?

Решение. Чтобы определить, какую долю y суммарного дохода всех олигархов получает доля x наиболее бедных олигархов, можно для каждого значения x:

1) определить, какую часть составляет доход *всех олигархов* в общем доходе страны;
2) определить, какую часть составляет доход доли x наиболее бедных олигархов в общем доходе страны;
3) разделить второй показатель на первый.

а) 90 % населения, не входящие в группу олигархов, получают долю $Y(0{,}9) = 0{,}81$ всего дохода, а олигархи, следовательно, получают $1 - Y(0{,}9) = 0{,}19$ *всего дохода.*

> **2 балла** за вывод доли дохода олигархов в общем доходе.

Доля x наиболее бедных олигархов составляет долю $0{,}1x$ от всего населения страны. При этом вместе с 90 % *не*олигархов они составляют $0{,}9+0{,}1x$ населения и получают $Y(0{,}9+0{,}1x) = (0{,}9 + 0{,}1x)^2$ всего дохода; без учета *не*олигархов *они получают* $Y(0{,}9 + 0{,}1x) - Y(0{,}9) = (0{,}9 + 0{,}1x)^2 - 0{,}9^2 = 0{,}18x + 0{,}01x^2$ *всего дохода.*

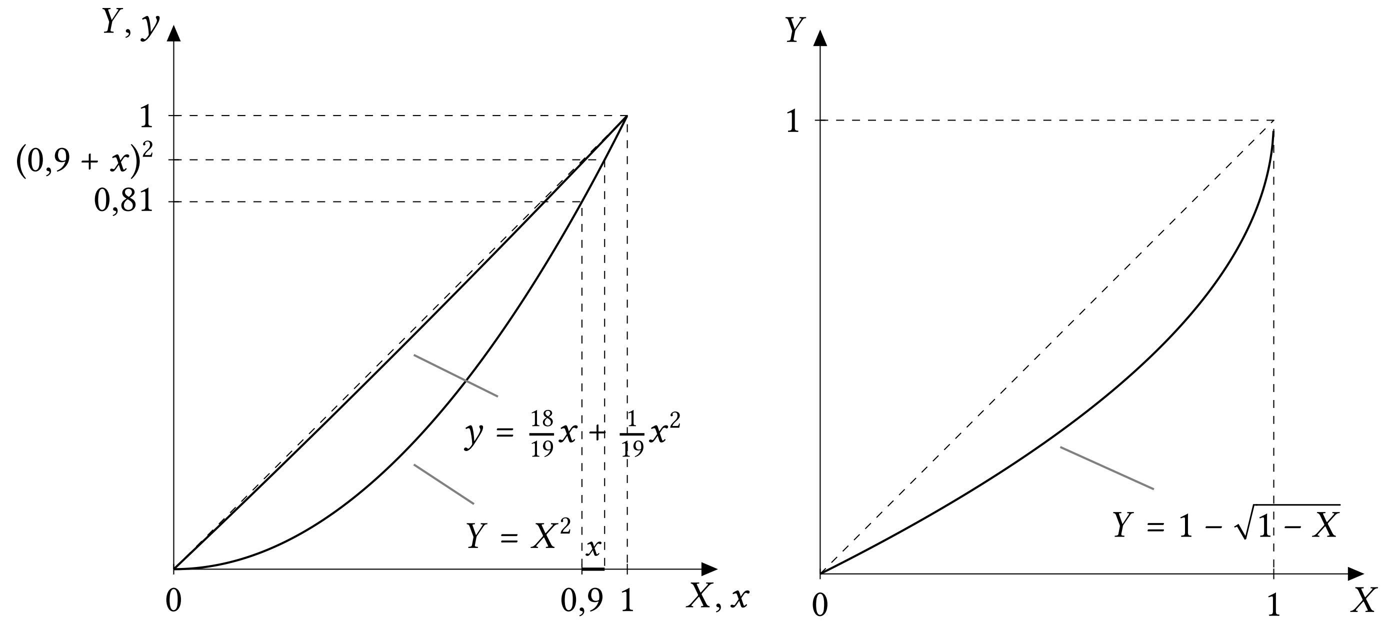
> **4 балла** за вывод доли дохода x беднейших олигархов в доходе страны.

Значит, в общем доходе всех олигархов доход x наиболее бедных из них составляет

> **2 балла** за вывод окончательного уравнения.

$$y = \frac{Y(0{,}9 + 0{,}1x) - Y(0{,}9)}{1 - Y(0{,}9)} = \frac{0{,}18x + 0{,}01x^2}{0{,}19} = \frac{18}{19}x + \frac{1}{19}x^2.$$

Это и есть искомое уравнение кривой Лоренца.



(a) Страна А **(b)** Страна В

Рис. 4.1: Кривые Лоренца

Графики приведены с целью иллюстрации авторского решения, в решениях участников для полного балла они не требуются.

Сравнить степень неравенства можно двумя способами.

Способ 1. *(Не требует расчета коэффициентов Джини.)* Заметим, что полученная кривая Лоренца лежит ближе к линии абсолютного равенства, чем кривая Лоренца для всей страны: действительно, $\frac{18}{19}x + \frac{1}{19}x^2 > x^2$ для $x \in (0; 1)$, так как в этом интервале $x > x^2$. (На Рис. 4.1а новая кривая Лоренца почти неотличима от прямой линии.) Значит, коэффициент Джини распределения доходов среди олигархов меньше, чем коэффициент Джини для всей страны. Среди олигархов степень неравенства доходов меньше, чем в стране в целом.

4 балла за сравнение коэффициентов Джини независимо от способа (иллюстрация необязательна). Ответ без обоснования оценивается в 0 баллов.

Способ 2. Рассчитаем коэффициенты Джини. Во всей стране коэффициент Джини равен

$$\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 X^2 dX\right) : \frac{1}{2} = 1 - 2\int_0^1 X^2 dX = 1 - 2\left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Среди олигархов коэффициент Джини равен

$$\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 \left(\frac{18}{19}x + \frac{1}{19}x^2\right) dx\right) : \frac{1}{2} = 1 - 2\int_0^1 \left(\frac{18}{19}x + \frac{1}{19}x^2\right) dx = 1 - 2\left(\frac{18}{19} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{57}.$$

Поскольку $\frac{2}{57} < \frac{1}{3}$, среди олигархов степень неравенства доходов меньше.

б) Действуя по аналогии, получаем, что искомая кривая

Лоренца будет иметь вид

$$y = \frac{Y(0{,}9 + 0{,}1x) - Y(0{,}9)}{1 - Y(0{,}9)} = \frac{1 - \sqrt{1 - 0{,}9 - 0{,}1x} - (1 - \sqrt{1 - 0{,}9})}{1 - (1 - \sqrt{1 - 0{,}9})} =$$
$$= \frac{\sqrt{0{,}1} - \sqrt{0{,}1 - 0{,}1x}}{\sqrt{0{,}1}} = 1 - \sqrt{1 - x}.$$

Как и в пункте **а)**: **2 балла** за вывод доли дохода олигархов в общем доходе, **4 балла** за вывод доли дохода x беднейших олигархов в доходе страны, **2 балла** за вывод окончательного уравнения.

Таким образом, кривая Лоренца распределения доходов среди 10 % богатейших имеет точно такой же вид, как кривая Лоренца в стране в целом! Следовательно, коэффициент Джини распределения доходов среди олигархов точно такой же, как в стране в целом.

2 балла за констатацию того, что коэффициенты Джини одинаковы.

Примечание. Для ответа на вопрос не понадобилось рассчитывать сам коэффициент Джини (он равен 1/3).

в) Представим себе страну С, населенную только олигархами страны В. 1 % богатейших жителей страны В являются 10 % богатейших жителей страны С (то есть олигархами среди олигархов). Таким образом, нам нужно сравнить неравенство доходов в стране С в целом и неравенство доходов среди *олигархов страны С*.

В пункте **б)** мы решили точно такую же задачу для страны В; при этом мы вывели, что в стране С кривая Лоренца имеет точно такой же вид как в стране В. Значит, и ответ будет таким же: кривая Лоренца среди олигархов страны С будет иметь такой же вид, как в стране С в целом, и *коэффициент Джини будет тем же самым*. Продолжая по аналогии, получаем, что и среди 0,1 % богатейших жителей страны В (1 % богатейших жителей страны С) *коэффициент Джини будет точно таким же*.

2 балла за правильный ответ на первый вопрос пункта, **4 балла** за объяснение.

2 балла за правильный ответ на второй вопрос пункта, отдельное объяснение при наличии верного объяснения ответа на первый вопрос не требуется.

Примечание. Распределение доходов в богатейших слоях общества в реальном мире скорее похоже на распределение доходов в стране В, чем в А. Во многих странах распределение доходов среди 5—10 % богатейших жителей хорошо описывается кривой Лоренца $y = 1 - (1 - x)^{\alpha}$, где $\alpha \in (0; 1)$. Для страны В $\alpha = 0{,}5$, а, например, в настоящее время в США $\alpha \approx 0{,}4$. Такое распределение называется *распределением Парето* в честь итальянского экономиста Вильфредо Парето, который первым обнаружил такую форму распределения доходов более 100 лет назад. Свойство, полученное нами в **б)** и **в)** (кривая Лоренца для t % богатейших одинакова для любого t) выполняется для любого α; этот феномен имеет место и в реальном мире среди обеспеченных слоев населения.

Это примечание носит информационный характер и не должно требоваться при проверке работ.