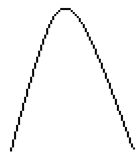
10 класс

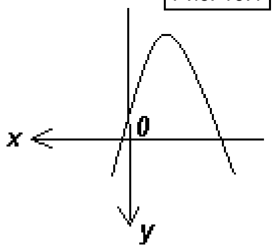
1. На листе бумаги построили параболу – график функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$, $b > 0$ и $c < 0$, – а оси координат стёрли. Как они могли располагаться? (*Изобразите любой пример, соответствующий указанным знакам коэффициентов, не изменяя положения самой параболы*.)



Ответ: см. рис. 10.1.

Так как $a > 0$, то ветви параболы “раскрыты” вдоль положительного направления оси ординат. Так как $c < 0$, то точка пересечения графика с осью ординат имеет отрицательную ординату. Так как $-\dfrac{b}{2a} < 0$, то вершина параболы находится в полуплоскости $x < 0$.

Рис. 10.1



<u>Критерии проверки</u>.

“+” – *приведен верный рисунок без пояснений, либо верный рисунок с верными пояснениями*

“±” – *приведен верный рисунок, к которому даны пояснения, содержащие ошибки*

“±” – *приведен верный рисунок без пояснений, либо верный рисунок с верными пояснениями, но на нем изменена ориентация системы координат (поворот от луча OX к лучу OY осуществляется по часовой стрелке)*

“∓” – *приведен верный рисунок, но изменено положение параболы (она перевернута)*

“∓” – *рисунок неверен, но правильно направлена ось ординат*

“–” – *задача не решена или решена неверно*

2. Сумма двух целых чисел равна S. Маша умножила левое число на целое число a, правое – на целое число b, сложила эти произведения и обнаружила, что полученная сумма делится на S. Алёша, наоборот, левое число умножил на b, а правое – на a. Докажите, что и у него аналогичная сумма разделится на S.

Решение. Пусть x – левое число, а y – правое; по условию: $x + y = S$.. Тогда у Маши получилось число $ax + by$, а у Алёши – число $bx + ay$. Сумма этих чисел равна $ax + by + bx + ay = (a+b)(x+y) = (a+b)S$, то есть она делится на S. Так как одно из двух слагаемых (число Маши) делится на S, то и другое (число Алеши) делится на S, что и требовалось.

<u>Критерии проверки</u>.

“+” – *приведено полное обоснованное решение*

“±” – *приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“–” – *рассмотрены только частные случаи или конкретные примеры*

“–” – *задача не решена или решена неверно*

3. В зоопарке есть 10 слонов и огромные чашечные весы. Известно, что если любые четыре слона встанут на левую чашу и любые три на правую, левая чаша перевесит. Три слона встали на левую чашу и два – на правую. Обязательно ли левая чаша перевесит?

Ответ: обязательно.

Решение. <u>Первый способ</u>. Пусть три слона встали на левую чашу весов, а два – на правую, и при этом левая чаша не перевесила правую. Попросим тогда самого лёгкого из пяти слонов, не стоящих на весах, встать на левую чашу, а самого тяжёлого – на правую. В этом случае левая чаша по-прежнему не сможет перевешивать правую, что противоречит условию. Следовательно, левая чаша обязательно перевесит.

<u>Второй способ</u>. Запишем массы слонов в порядке возрастания: $m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_{10}$. По условию: $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 > m_8 + m_9 + m_{10}$. Так как $m_4 \le m_8$, то $m_1 + m_2 + m_3 > m_9 + m_{10}$.

Таким образом, три самых лёгких слона тяжелее двух самых тяжёлых, следовательно, любые три слона тяжелее любых двух из оставшихся.

<u>Критерии проверки</u>.

“+” – *приведено полное обоснованное решение (любым способом)*

“±” – *приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“–” – *рассмотрены только частные случаи или конкретные примеры*

“–” – *задача не решена или решена неверно*

4. Из вершины тупого угла *A* треугольника *ABC* опущена высота *AD*. Проведена окружность с центром *D* и радиусом *DA*, которая вторично пересекает стороны *AB* и *AC* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите *AC*, если *AB* = *c*, *AM* = *m* и *AN* = *n*.

Ответ: $\frac{mc}{n}$.

Решение. Докажем, что $AM \cdot AB = AN \cdot AC$. Это можно сделать по-разному.

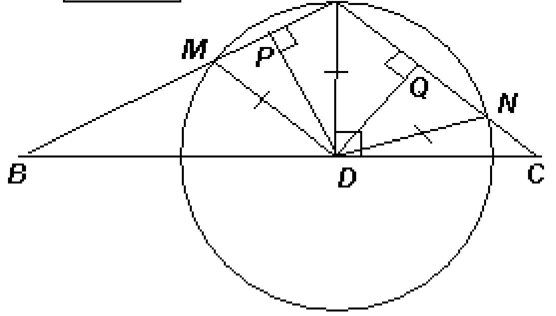


Рис. 10.4а

<u>Первый способ</u>. В прямоугольных треугольниках ADB и ADC проведём высоты DP и DQ соответственно (см. рис. 10.4а). Тогда $AP \cdot AB = AD^2 = AQ \cdot AC$. Так как треугольники ADM и ADN – равнобедренные, то $AP = \frac{1}{2}AM$ и $AQ = \frac{1}{2}AN$.

Заменив AP и AQ в равенстве $AP \cdot AB = AQ \cdot AC$, получим требуемое.

<u>Второй способ</u>. Докажем, что четырёхугольник $BMNC$ – вписанный, тогда требуемое равенство будет следовать из теоремы об отрезках секущих, применённой к точке A и окружности, описанной вокруг четырёхугольника $BMNC$ (см. рис. 10.4б).

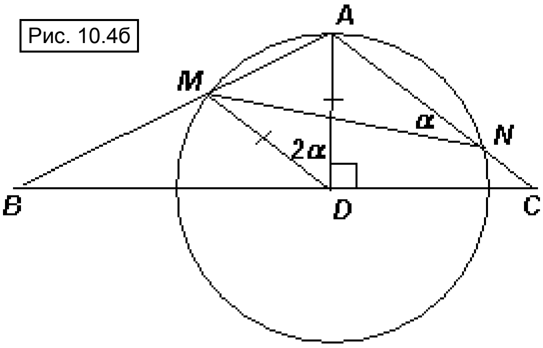


Рис. 10.4б

Пусть $\angle ANM = \alpha$, тогда $\angle AOM = 2\alpha$ (вписанный и центральный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Кроме того, из равнобедренного треугольника ADM: $\angle MAD = 90° - \alpha$, поэтому $\angle ABC = \alpha$. Из равенства $\angle ABC = \angle ANM$ следует, что $BMNC$ – вписанный.

После того, как доказано указанное равенство, достаточно подставить в него данные из условия задачи и получить ответ.

<u>Третий способ</u>. Пусть данная окружность пересекает отрезки BD и CD в точках K и L соответственно, а ее радиус равен R (см. рис. 10.4в). Тогда по теореме об отрезках секущих: $BA \cdot BM = BL \cdot BK$, то есть $c(c - m) = BK(BK + 2R)$. Из треугольника ABD по теореме Пифагора: $c^2 = (BK + R)^2 + R^2 = 2R^2 + BK^2 + 2BK \cdot R$. Следовательно, $c(c - m) = c^2 - 2R^2$, откуда $c \cdot m = 2R^2$.

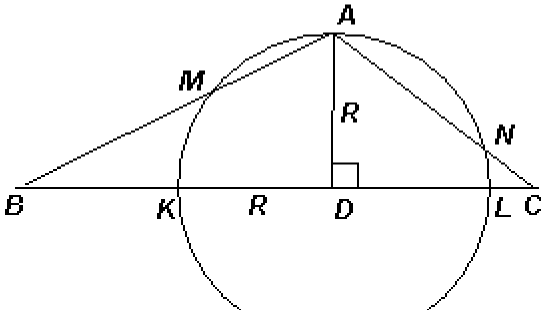


Рис. 10.4в

Проведя аналогичное рассуждение для стороны AC, получим, что $AC \cdot n = 2R^2$. Тогда $AC = \frac{mc}{n}$.

Отметим, что при этом способе решения вместо теоремы Пифагора можно применить теорему косинусов для треугольника BAK.

<u>Критерии проверки</u>.

"+" – *приведено полное обоснованное решение*

"±" – *приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, перепутаны m и n)*

"∓"– *план решения верный и получен верный ответ, но не доказаны какие-то из используемых фактов (например, использовано, но не доказано, что четырехугольник BMNC – вписанный)*

"∓" – *план решения верный, но само решение содержит ошибки, либо не доведено до конца*

"∓" – *нет четкого плана решения, но обоснованы какие-то существенные факты, из которых можно получить решение*

"–" – *приведен только ответ*

"–" – *задача не решена или решена неверно*

5. Вася разобрал каркас треугольной пирамиды в кабинете математики и хочет из её шести рёбер составить два треугольника так, чтобы каждое ребро являлось стороной ровно одного треугольника. Всегда ли Вася сможет это сделать?

Ответ: всегда.

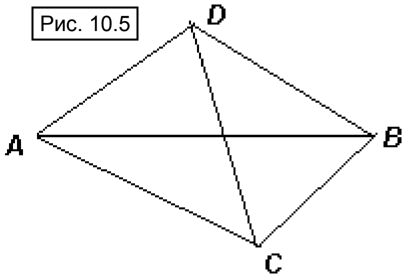


Рис. 10.5

Решение. Заметим, что если Вася сумеет сложить треугольник из рёбер, выходящих из одной вершины тетраэдра, то второй треугольник уже сложен, и задача решена.

Пусть AB – самое длинное ребро тетраэдра $DABC$ (см. рис. 10.5).. Предположим, что ни из тройки рёбер с общей вершиной A, ни из тройки рёбер с общей вершиной B, Вася не может сложить треугольник. Это означает, что $AB \geq AC + AD$ и $AB \geq BC + BD$. Тогда $2AB \geq AC + AD + BC + BD$.

С другой стороны, по неравенству треугольника для граней *ABD* и *ABC*, получим: $AB < AD + BD$ и $AB < AC + BC$. Тогда $2AB < AC + AD + BC + BD$ – противоречие.

<u>*Критерии проверки*</u>.

"+" – *приведено полное обоснованное решение*

"∓" – *присутствует верная идея решения, но оно не доведено до конца или допущена ошибка*

"–" – *разобраны только какие-то частные случаи (например, рассмотрен правильный тетраэдр)*

"–" – *задача не решена или решена неверно*

6. 100 включённых и 100 выключенных фонариков случайным образом разложены по двум коробкам. У каждого фонарика есть кнопка, нажатие которой выключает горящий фонарик и зажигает выключенный. Ваши глаза завязаны, и Вы не можете видеть, горит ли фонарик. Но Вы можете перекладывать фонарики из коробки в коробку и нажимать на них кнопки. Придумайте способ добиться того, чтобы горящих фонариков в коробках было поровну.

Решение. Сначала переложим все фонарики в правую коробку, не трогая выключатели. Далее переложим из правой коробки в левую любые сто фонариков, переключая при этом каждый, и цель будет достигнута. Докажем это.

При перекладывании (с переключением) одного фонарика разность между количествами горящих фонариков справа и слева уменьшается на 1. Действительно, если мы взяли фонарик, который не горел, зажгли его и переложили налево, то справа количество горящих фонариков не изменилось, а слева оно увеличилось на 1. Если же мы взяли горящий фонарик, погасили его и переложили налево, то справа количество горящих уменьшилось на 1, а слева оно осталось прежним. В тот момент, когда все фонарики находились в правой коробке, рассматриваемая разность равна 100, значит, после ста перекладываний она станет равной нулю, что и требуется.

Существуют и другие алгоритмы действий.

<u>*Критерии проверки*</u>.

"+" – *приведено полное обоснованное решение*

"±" – *приведен верный алгоритм, но его обоснование неполно (например, сказано, что разность горящих фонариков будет уменьшаться на 1, но не объяснено, почему*

"∓" – *приведен только верный алгоритм без всяких объяснений*

"–" – *задача не решена или решена неверно*