Материалы для проведения заключительного этапа

XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2016–2017 учебный год

Второй день

Калининград, 24–30 апреля 2017 г.

Москва, 2017

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, М. П. Каленков, Д. В. Карпов, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, С. И. Токарев, А. Д. Труфанов, Б. В. Трушин, М. А. Фадин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, В. З. Шарич. О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

11 класс

11.5. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 2$ с неотрицательными коэффициентами, а a, b и c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите. что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого треугольника. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть, без ограничения общности, $a \geqslant b \geqslant c$; эти три положительных числа являются длинами сторон треугольника тогда и только тогда, когда $a < b + c$. Поскольку коэффициенты $P(x)$ неотрицательны, имеем $P(a) \geqslant P(b) \geqslant P(c) > 0$; значит, нам надо проверить, что $\sqrt[n]{P(a)} < \sqrt[n]{P(b)} + \sqrt[n]{P(c)}$.

Пусть $P(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_0$. Обозначим $G(x) = P(x)/x^n$. Заметим, что

$$G(a) = p_n + \frac{p_{n-1}}{a} + \ldots + \frac{p_0}{a^n} \leqslant p_n + \frac{p_{n-1}}{b} + \ldots + \frac{p_0}{b^n} = G(b)$$

и, аналогично, $G(a) \leqslant G(c)$. Значит,

$$\sqrt[n]{P(a)} = a\sqrt[n]{G(a)} < (b + c)\sqrt[n]{G(a)} \leqslant$$

$$\leqslant b\sqrt[n]{G(b)} + c\sqrt[n]{G(c)} = \sqrt[n]{P(b)} + \sqrt[n]{P(c)},$$

что и требовалось доказать.

11.6. В некоторых клетках квадрата 200×200 стоит по одной фишке — красной или синей; остальные клетки пусты. Одна фишка *видит* другую, если они находятся в одной строке или одном столбце. Известно, что каждая фишка видит ровно пять фишек другого цвета (и, возможно, некоторое количество фишек своего цвета). Найдите наибольшее возможное количество фишек, стоящих в клетках. (*И. Богданов*)

Ответ. 3800 фишек.

Решение. Пример, содержащий 3800 фишек, получается, например, так. Выделим у квадрата 200×200 «каёмку» ширины 5. Эта каёмка состоит из четырёх угловых квадратов 5×5 и четырёх прямоугольников 5×190. Расставим фишки в эти четыре прямоугольника: в левый и в верхний — красные, а в правый и в нижний — синие. Нетрудно видеть, что этот пример удовлетворяет всем требованиям, и в нём по 1900 красных и синих фишек.

Осталось доказать, что фишек не может быть больше 3800. Рассмотрим произвольную расстановку фишек, удовлетворяющую требованиям. Назовём ряд (строку или столбец) *разноцветным*, если в нём есть фишки обеих цветов.

Сделаем сразу два полезных замечания. Во-первых, каждая фишка видит какую-то фишку другого цвета, поэтому каждая фишка лежит хотя бы в одном разноцветном ряду. Кроме того, поскольку разноцветный ряд содержит красную фишку, в нём не может быть более пяти синих фишек (иначе красная все их увидит). Аналогично, в разноцветном ряду не более пяти красных фишек, то есть всего не более 10 фишек.

Теперь нетрудно получить требуемую оценку. Если есть 191 разноцветная строка, то в них не более $191 \cdot 10 = 1910$ фишек, а в оставшихся девяти строках не более $9 \cdot 200 = 1800$ фишек, итого не больше $1910 + 1800 < 3800$ фишек. Аналогично разбирается случай, когда есть 191 разноцветный столбец. Если же и тех и других не более, чем по 190, то они содержат не более $190 \cdot 10 + 190 \cdot 10 = 3800$ фишек, причём все фишки содержатся в этих рядах. Оценка доказана.

Замечание. Можно показать, что при любом $n \geqslant 30$ наибольшее число фишек, которые можно разместить на доске $n \times n$ согласно условиям, равно $20(n-10)$.

Приведём соответствующую оценку. Пусть, без ограничения общности, на доске есть a разноцветных столбцов и $b \geqslant a$ разноцветных строк. Если $b \leqslant n-10$, то, как и в решении, получаем, что общее число фишек не больше $10a + 10b \leqslant 20(n-10)$. Пусть $b > n-10$. Тогда в b строках расположено максимум по 10 фишек; с другой стороны, каждая фишка должна находиться в разноцветном ряду, так что в пересечении $n-a$ одноцветных столбцов и $n-b$ одноцветных строк фишки стоять не могут. Поэтому в $n-b$ одноцветных строках не более, чем по $a(\leqslant b)$ фишек, и общее число фишек не больше, чем $10b + (n-b)b = (n+10-b)b \leqslant 20(n-10)$ (последнее неравенство выполнено, поскольку $(n+10-b)+b = 20+(n-10)$ и $n+10-b \leqslant 20 \leqslant n-10 \leqslant b$).

11.7. Изначально на доске написано натуральное число N. В любой момент Миша может выбрать число $a > 1$ на доске, стереть его и дописать все натуральные делители a, кроме него самого (на доске могут появляться одинаковые числа). Через некоторое время оказалось, что на доске написано N^2 чисел. При каких N это могло случиться? (*М. Фадин, К. Коваленко*)

Ответ. Только при $N = 1$.

Решение. Лемма. *При любом натуральном* $n > 1$ *верно неравенство*

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Доказательство. Ясно, что при $t > 1$

$$\frac{1}{t^2} < \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\,.$$

Складывая такие неравенства при $t = 2, 3, \ldots, n$, получаем

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

что и требовалось. □

Докажем индукцией по N, что при любом натуральном N на доске окажется не более N^2 чисел, причём ровно N^2 чисел может оказаться лишь при $N = 1$. Из этого и будет следовать ответ в задаче.

База при $N = 1$ очевидна. Для перехода предположим, что $N > 1$. Пусть $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k < d_{k+1} = N$ — все делители числа N. После первой замены на доске окажутся числа d_1, d_2, …, d_k. Мысленно разделим доску на k частей так, чтобы число d_j находилось в j-ой части. Далее при каждой замене будем выписывать преемников числа в ту же часть, где было само число. По предположению индукции, в j-й части доски не может оказаться больше, чем d_j^2 чисел. Значит, общее количество чисел на доске не может превышать $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_k^2$.

Заметим теперь, что числа $N/d_1 > N/d_2 > \ldots > N/d_k > N/d_{k+1}$ также являются делителями числа N. Следовательно, они равны числам d_{k+1}, d_k, …, d_2, d_1 соответственно. С учётом леммы получаем, что общее количество чисел на доске не будет превосходить числа

$$d_1^2 + d_2^d + \ldots + d_k^2 = \frac{N^2}{d_{k+1}^2} + \frac{N^2}{d_k^2} + \ldots + \frac{N^2}{d_2^2} =$$

$$= N^2\left(\frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} + \ldots + \frac{1}{d_{k+1}^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant N^2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{N^2}\right) < N^2 \cdot 1 = N^2,$$

что и требовалось доказать.

11.8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через I_A, I_B, I_C и I_D центры окружностей ω_A, ω_B, ω_C и ω_D, вписанных в треугольники DAB, ABC, BCD и CDA соответственно. Оказалось, что $\angle BI_AA + \angle I_CI_AI_D = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BI_BA + \angle I_CI_BI_D = 180^\circ$. (*А. Кузнецов*)

Решение. *Шаг 1.* Обозначим через P центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей ω_A в ω_D (точка P может оказаться бесконечно удалённой), а через R — центр гомотетии с отрицательным коэффициентом, переводящей ω_A в ω_C (см. рис. 4). Поскольку AD — общая внешняя касательная к ω_A и ω_D, имеем $P \in AD$; аналогично, $R \in BD$.

Покажем, что данное условие

$$\angle BI_AA = 180^\circ - \angle I_CI_AI_D \qquad (*)$$

равносильно тому, что прямая ℓ_A, проходящая через P и R, — общая касательная к окружностям ω_A, ω_C и ω_D. Пусть для определённости точка P лежит на луче DA (другие случаи аналогичны). Поскольку ω_A вписана в треугольник ABD, имеем $\angle AI_AB = 90^\circ + \angle ADB/2$; с другой стороны, $180^\circ - \angle I_CI_AI_D = \angle PI_AR$. Значит, $(*)$ равносильно равенству $\angle PI_AR = 90^\circ + \angle PDR/2$.

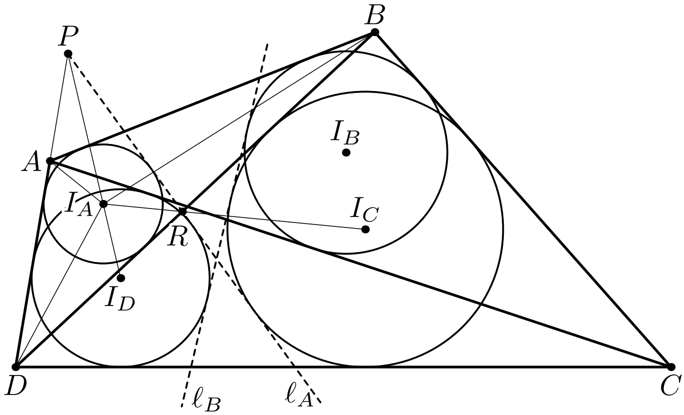

Рис. 4

Обозначим через J центр окружности, вписанной в треугольник PDR. Точки I_A и J лежат на биссектрисе этого треугольника из точки D, а $(*)$ равносильно тому, что $\angle PJR = \angle PI_AR$ — то есть совпадению точек J и I_A. Это, в свою очередь, означает в точности, что прямые PR и RD симметричны относительно I_AI_C, а прямые PD и PR симметричны относительно I_AI_D, то есть что PR касается всех трёх окружностей ω_A, ω_C и ω_D (ω_C лежит по другую сторону от PR, нежели остальные две).

Аналогично, требуемое условие $\angle BI_BA + \angle I_CI_BI_D = 180^\circ$ равносильно тому, что у окружностей ω_A, ω_C и ω_D существует общая касательная ℓ_B, относительно которой ω_C и ω_D лежат по одну сторону, а ω_A — по другую. Осталось оказать, что эти два факта равносильны.

Шаг 2. Обозначим точку касания окружности ω_A с AD через A_{AD}; аналогично обозначим другие точки касания (см.

рис. 5). Заметим, что $A_{AD}D_{AD} = |AA_{AD} - AD_{AD}| = \left|\dfrac{AB+AD-BD}{2} - \dfrac{AC+AD-CD}{2}\right| = \dfrac{|AB+CD-BD-AC|}{2}$; аналогично,

$$B_{BC}C_{BC} = \frac{|AB+CD-BD-AC|}{2} = A_{AD}D_{AD},$$

$$A_{BD}C_{BD} = \frac{|AD+BC-AB-CD|}{2} = B_{AC}D_{AC}.$$

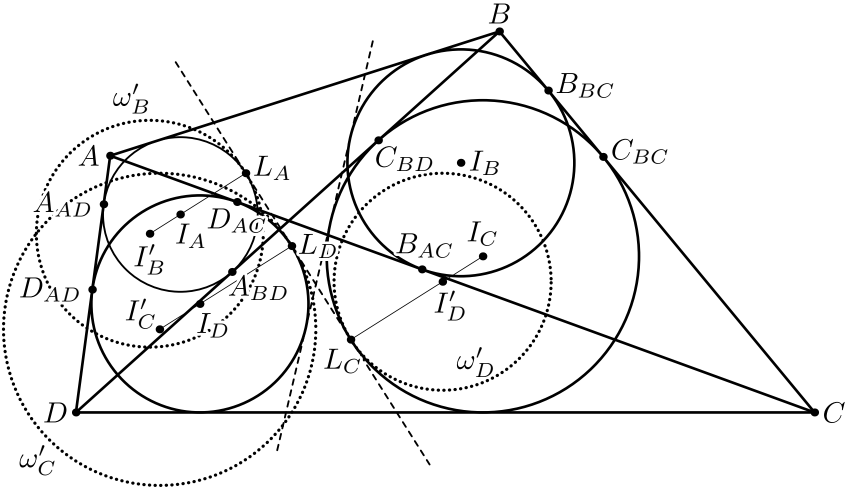

Рис. 5

Предположим теперь, что ℓ_A касается окружностей ω_A, ω_C и ω_D в точках L_A, L_C и L_D соответственно. Тогда $L_AL_D = A_{AD}D_{AD} = B_{BC}C_{BC}$ и $L_AL_C = A_{BD}C_{BD} = D_{AC}B_{AC}$.

Рассмотрим окружности ω'_B, ω'_C и ω'_D с центрами I'_B, I'_C и I'_D, имеющие те же радиусы, что и ω_B, ω_C и ω_D соответственно, и касающиеся ℓ_A в точках L_A, L_D и L_C соответственно (причём ω'_B и ω'_C лежат по одну сторону от ℓ_A, а ω'_D — по другую). Тогда соответственные отрезки общих касательных к ω'_B, ω'_C, ω'_D и к ω_B, ω_C, ω_D имеют одинаковые длины (для ω_C и ω_D это тривиально, для остальных пар следует из сказанного выше).

Отсюда легко следует, что соответственные стороны треугольников $I_BI_CI_D$ и $I'_BI'_CI'_D$ равны (например, $I'_BI'_C = I_BI_C$ из равенства четырёхугольников $I'_BL_AL_DI'_C$ и $I_BB_{BC}C_{BC}I_C$). Поэтому и конфигурации окружностей $(\omega_B, \omega_C, \omega_D)$ и $(\omega'_B, \omega'_C, \omega'_D)$ также равны. Поскольку окружности в одной тройке касаются одной прямой ℓ_A, то же верно и для другой тройки. Это и оставалось доказать.

Замечание. Каждый из шагов 1 и 2 можно осуществить по-другому.

Например, на *Шаге 1* можно рассуждать следующим образом. Пусть ℓ_{AD} и ℓ_{AC} — соответственно вторая внешняя касательная к ω_A, ω_D и вторая внутренняя касательная к ω_A, ω_C. Обе они разделяют точки I_A и B, так что они совпадают тогда и только тогда, когда $\ell_{AD} \parallel \ell_{AC}$. Поскольку $I_A I_D$ — биссектриса угла между AD и ℓ_{AD}, а $I_A I_C$ — биссектриса угла между BD и ℓ_{AC}, прямые ℓ_{AD} и ℓ_{AC} параллельны тогда и только тогда, когда $\angle(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}) = 2\angle(I_A I_D, I_A I_C)$; последнее равенство равносильно $(*)$.

Далее, из вычислений в начале *Шага 2* можно заметить, что длина общей внутренней касательной к ω_B, ω_D равна сумме длин общей внутренней касательной к ω_C, ω_D и общей внешней касательной к ω_B, ω_C. После этого можно заменить эти окружности на точку I_D и окружности Ω_B, Ω_C с центрами I_B, I_C и радиусами $r_B + r_D$, $r_C + r_D$ соответственно (здесь r_X — радиус окружности ω_X), про которые известно, что длина касательной из I_D к Ω_B равна сумме длин касательной из I_D к Ω_C и общей касательной к Ω_B и Ω_C. В этом случае доказать, что I_D лежит на общей касательной к Ω_B и Ω_C, можно разными способами.