# XXIV Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

# Смоленск, 2017 г.

---

# Теоретический тур

## X/XI.5 ОСКОЛКИ ЛУНЫ

*Е.Н. Фадеев, О.С. Угольников*

**Условие.** Враждебные инопланетяне разрушили Луну, превратив ее в огромное количество шарообразных осколков диаметром 10 м. Все эти тела стали двигаться, равномерно заполнив пространство вокруг Земли между сферами размером с перигей и апогей лунной орбиты. Оцените концентрацию этих осколков и звездную величину всей полусферы ночного неба на Земле. Влиянием земной атмосферы пренебречь. Считать все осколки одинаковыми, а их плотность и оптические свойства аналогичными самой Луне.

**Решение.** Ответим сначала на первый вопрос задачи. Пусть $R$ – радиус Луны (1738 км), а $r$ – радиус осколка (5 м). Объем Луны составляет $(4/3)\pi R^3$, Объем осколка – $(4/3)\pi r^3$. Поскольку объем всех осколков равен объему Луны, полное число этих тел равно

$$N = (R/r)^3 = 4.2\cdot 10^{16}.$$

Пространство, заполненное осколками, представляет собой сферический слой со средним радиусом $D$ (среднее расстояние от Земли до Луны) и толщиной $2De$ ($e$ - эксцентриситет орбиты Луны), толщина существенно меньше радиуса. Объем этой области равен

$$V = 4\pi D^2\cdot 2De = 8\pi D^3 e = 7.8\cdot 10^{16} \text{ км}^3.$$

Концентрация осколков $n=N/V\sim0.55$ км$^{-3}$. Если мы возьмем предельные значения расстояния Луны в перигее и апогее из справочных данных, то мы получим несколько большее значение объема ($9.2\cdot10^{16}$ км$^3$) и концентрации (0.45 км$^{-3}$).

Теперь нужно выяснить, какую яркость ночного неба будут создавать эти осколки. Казалось бы, мы можем достаточно просто решить эту задачу, определив яркость каждого осколка и умножив ее на число осколков видимых на небе. Луна и все осколки находятся на примерно одинаковом расстоянии от наблюдателя. Обозначив яркость Луны как $J_0$, получаем, что яркость одного осколка есть

$$j = Jr^2/R^2.$$

Из любой точки Земли будет видна примерно половина всех осколков. Их суммарная яркость составит

$$J = (N/2)\, j = JR/2r.$$

Соответствующая звездная величина будет равна

$$m = m_0 - 2.5 \lg (JR / 2r) = m_0 - 13.1.$$

Сам по себе этот ответ уже вызывает удивление: небо оказывается очень ярким. Действительно, среднюю звездную величину Луны можно взять для фазы, близкой к первой или последней четверти, а можно определить, зная ее сферическое альбедо $A$:

$$m_0 = M_0 - 2.5\lg\frac{\pi R^2 A}{4\pi D^2} = M_0 - 2.5\lg\frac{R^2 A}{4D^2} = M_0 + 16.1 = -10.6.$$

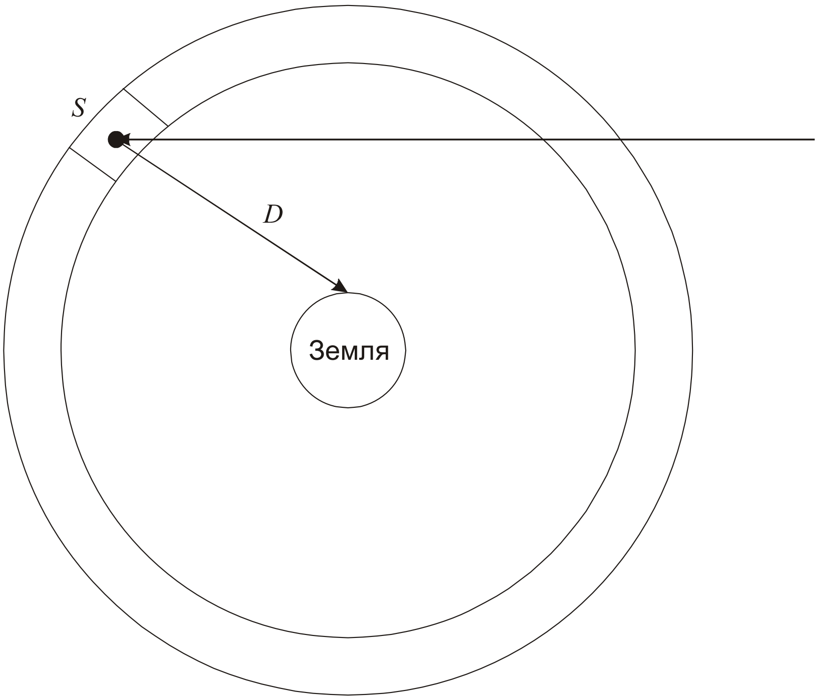
Выходит, что при сферическом альбедо 0.07 небо должно иметь величину $-23.7^m$, то есть всего на $3^m$ или в 16 раз слабее Солнца! Мысленно предположив большее альбедо (порядка единицы) и возможность наблюдения всей сферы из осколков, мы получим, что они светили бы ярче Солнца, чего не может быть (в реальности, даже при альбедо, равном единице, вся равномерно рассеивающая сфера не может светить ярче 1/4 от яркости Солнца).

Причина противоречия в том, что мы не учли высокую оптическую плотность слоя осколков. Умножим площадь, на которой осколок задерживает излучение ($\pi r^2$) на число осколков ($R^3/r^3$), и разделим это на площадь всей сферы:

$$\tau = \frac{\pi r^2 R^3}{r^3 4\pi D^2} = \frac{R^3}{4rD^2} = 1.8.$$

Полученная величина есть среднее количество осколков на пути луча, идущего перпендикулярно к слою (фактически, его оптическая толщина). Даже в этом случае осколки будут в заметной степени затенять друг друга. С другой стороны, коль скоро это число порядка единицы, значительное число света будет рассеиваться осколками и попадать к наблюдателю.

Точный расчет яркости сферы представляет собой достаточно сложную задачу, однако это можно сделать приближенно. Приведем один из наиболее простых и при этом эффективных способов. Рассмотрим одну из возможных траекторий луча света от Солнца к какому-либо осколку и далее к Земле.




Путь луча до осколка может быть разным, он может проходить через слой один или два раза с существенно разной длиной. Так как нас интересует полная яркость небесной полусферы, будем считать, что каждый равный элемент площади сферы $S$ рассеивает одинаковое количество солнечного излучения. Будем считать, что вся солнечная энергия, попадающая на сферу, задерживается или рассеивается в ней (оптическая толщина по диаметру не менее 3.6, по хорде – еще больше). Сфера площадью $4\pi D^2$ за единицу времени задерживает $\pi D^2 \cdot J_0$ солнечной энергии ($J_0$ – плотность потока солнечного излучения на расстоянии Земли). 7% этой энергии рассеивается в окружающее пространство. Плотность потока энергии от элемента сферы с площадью $S$ на Земле будет равна

$$j_S = J_0 \pi D^2 \frac{S}{4\pi D^2} \cdot \frac{A}{4\pi D^2} \cdot e^{-\tau/2}.$$

Последний множитель выражает ослабление излучения в сфере уже после рассеяния, средний путь через сферу при этом равен половине ее толщины. Суммируя все элементы с площадью $S$ по полусфере, получаем общую плотность потока излучения от нее на Земле:

$$j = j_S \cdot \frac{2\pi D^2}{S} = J_0 \frac{A}{8} e^{-\tau/2}.$$

Переведем это в звездные величины:

$$m = M_0 - 2.5\lg\left(\frac{A}{8} e^{-\tau/2}\right) = M_0 - 2.5\lg\left(\frac{A}{8}\right) + \frac{1.08\tau}{2} = M_0 + 6.1 = -20.7.$$

Несмотря на большую оптическую плотность сферы, небо все равно остается достаточно ярким. Конечно, здесь мы не учли, что эта яркость будет существенно меньше в областях неба вдали от Солнца, но и там засветка останется значительной. Если говорить об астрономических наблюдениях, то они будут затруднены также тем, что сфера будет блокировать излучение далеких объектов.

**Система оценивания (от одного члена жюри).**

**1 этап: 2 балла.**
Определение концентрации осколков в слое.
**2 этап: 1 балл.**
Указание, что осколки будут затенять свет Солнца друг от друга, а также накладываться друг на друга при наблюдении с Земли.
**3 этап: 3 балла.**
Создание модели расчета звездной величины неба в условиях взаимного затенения осколков. Модель может отличаться от предложенной выше, оценка определяется ее адекватностью.
**4 этап: 2 балла.**
Расчет звездной величины неба.

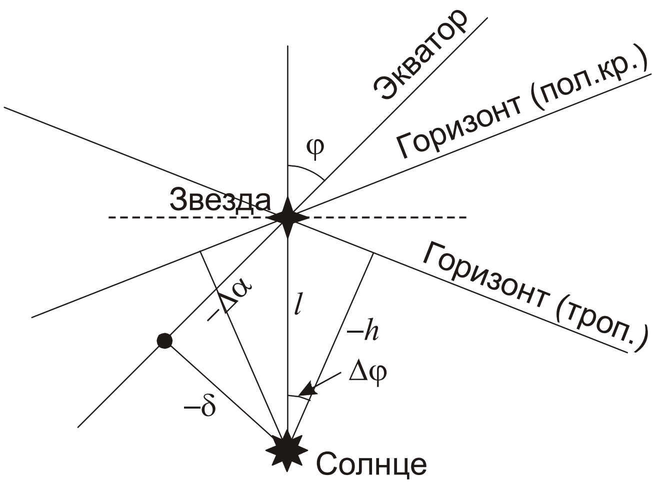
**Вероятная ошибка при решении:** Расчет звездной величины одного осколка, за которым следует прямой переход ко всей небесной полусфере с известным числом осколков, без учета эффекта затенения. В этом случае может быть выставлено 2 балла за первый этап и 2 балла за четвертый этап, с максимальной суммарной оценкой 4 балла. Если при этом не учитывается эффект фазы, и все осколки считаются полностью освещенными (с итоговым ответом около $-25.8^m$), то общая оценка уменьшается до (2+1)=3 баллов.

# XI.1 ГЕЛИАКИЧЕСКИЙ ВОСХОД

*О.С. Угольников*

**Условие.** Гелиакическим восходом звезды называется ее восход на фоне утренней зари, при котором она впервые становится видимой после эпохи соединения с Солнцем. Известно, что у некоторой звезды на небесном экваторе гелиакический восход в двух пунктах на одном меридиане на северном тропике и северном полярном круге произошел одновременно. Определите прямое восхождение этой звезды. Считать, что звезда становится видимой на фоне зари при погружении Солнца под горизонт на 12°. Атмосферной рефракцией и поглощением света пренебречь.

**Решение.** Коль скоро звезда находится на небесном экваторе, ее восход будет происходить в точке востока. Изобразим звезду, Солнце и линии горизонта для обеих широт.




Горизонтальная пунктирная линия – биссектриса линий горизонта для двух указанных в условии широт. Она сама является горизонтом для широты $\varphi$=45° – среднего арифметического этих широт. Вертикальная линия направлена в зенит этой широты, и небесный экватор образует угол φ с этой линией. Модуль разницы между величинами каждой из широт и средней широтой φ есть Δφ (21.6°). Звезда находится в точке востока, на горизонте обеих широт, а Солнце располагается на высоте $-h=-12°$ на этих широтах, то есть равноудалено от линий горизонта. Следовательно, оно находится на вертикальной линии, ниже звезды. Отсюда мы можем получить угловое расстояние между звездой и Солнцем:

$$l = \frac{-h}{\cos\Delta\varphi} \approx 13^{\circ}.$$

Склонение Солнца отрицательно и равно

$$\delta = l \sin\varphi = \frac{-h\sin\varphi}{\cos\Delta\varphi} = -9^{\circ}.$$

Такое склонение у Солнца бывает вскоре после осеннего равноденствия и незадолго перед весенним равноденствием. Обозначив угол наклона экватора к эклиптике через ε, запишем выражения для прямого восхождения Солнца:

$$\alpha_{01} = 12\text{ч} + \frac{-\delta}{\operatorname{tg}\varepsilon} = 13\text{ч }25\text{м}; \quad \alpha_{02} = 24\text{ч} - \frac{-\delta}{\operatorname{tg}\varepsilon} = 22\text{ч }35\text{м}.$$

На рисунке видно, что звезда располагается западнее Солнца, ее прямое восхождение меньше. Соответствующая разница составляет

$$\Delta\alpha = l\cos\varphi = \frac{-h\cos\varphi}{\cos\Delta\varphi} \approx -35 \text{ м}.$$

Итак, два возможных значения прямого восхождения звезды составляют

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{01,2} + \Delta\alpha = 12\text{ч}50\text{м};\ 22\text{ч}00\text{м}.$$

**Система оценивания (от одного члена жюри).**

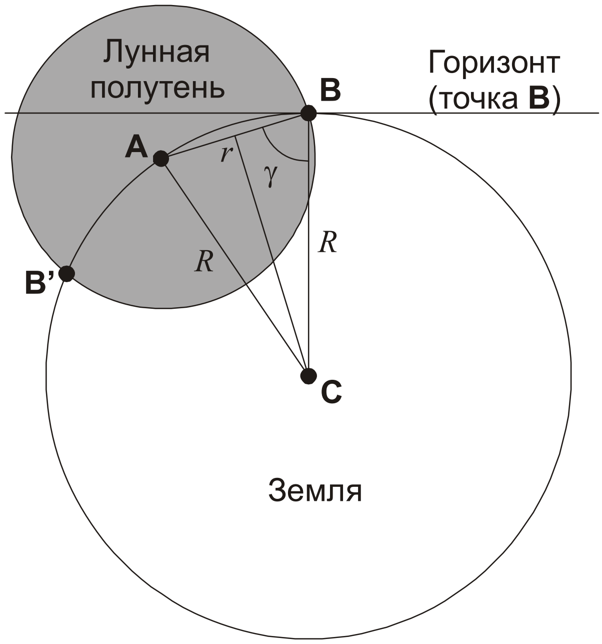
**1 этап: 2 балла.**
Правильное представление о взаимном расположении Солнца, звезды и горизонта на разных широтах (тропик, 45°, полярный круг).
**2 этап: 1 балл.**
Вычисление склонения Солнца.
**3 этап: 2 балла.**
Вычисление прямого восхождения Солнца (по 1 баллу за каждый из вариантов).
**4 этап: 1 балл.**
Определение разности прямых восхождений звезды и Солнца.
**5 этап: 2 балла.**
Определение прямого восхождения звезды (по 1 баллу за каждый из вариантов).

# XI.2 ЗАТМЕНИЕ НА ГОРИЗОНТЕ

*О.С. Угольников*

**Условие.** В некоторый момент времени в пункте **A** на Земле наблюдается полное солнечное затмение с фазой 1.000, а в пункте **B** – частное солнечное затмение с фазой 0.001. В обоих случаях затмение наблюдается у горизонта. Нарисуйте вид Солнца и Луны в пункте **B**. С какой стороны (под каким углом по отношению к вертикали) располагается ущерб на диске Солнца при наблюдении в пункте **B**? Угловые размеры Солнца и Луны во время затмения одинаковы.

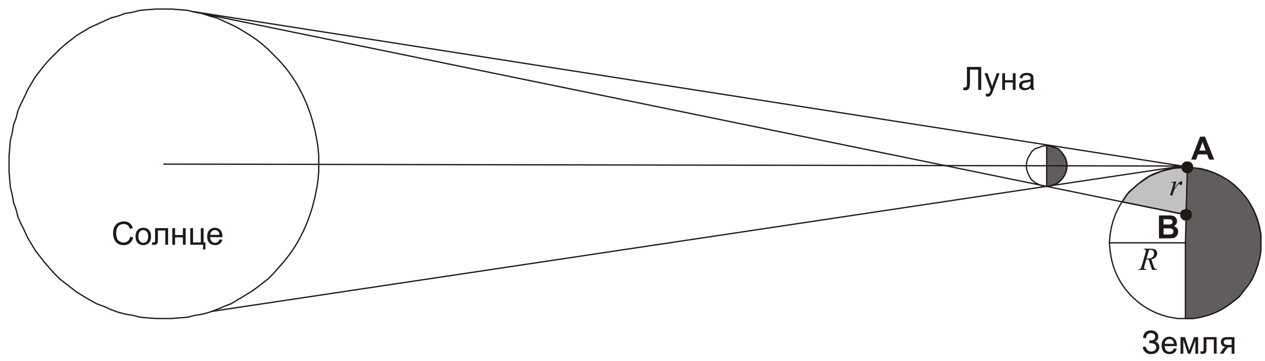
**Решение.** Изобразим Землю и лунную тень и полутень со стороны Солнца в указанный момент. Коль скоро полное затмение видно у горизонта, центр тени и полутени будет располагаться на краю изображения Земли. Для удобства расположим точку **B** в верхней части рисунка (в реальности таких точек две, **B** и **B'**, ответ на задачу в них будет одинаковым).



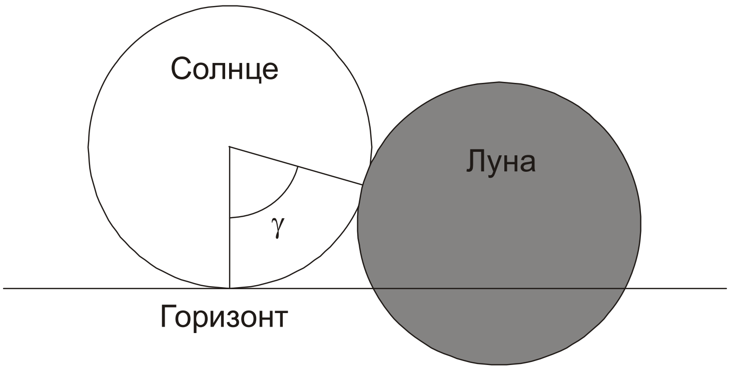

При наблюдении из пункта **B** линия на небесной сфере "Центр Солнца - центр Луны" будет указывать направление на центр тени, где в этот момент происходит полное затмение. По рисунку видно, что Луна в точке **B** окажется ниже Солнца, а ее положение относительно вертикали будет определяться углом γ. Треугольник **ABC** – равнобедренный, и данный угол можно вычислить как:

$$\gamma = \arccos \frac{r}{2R}.$$

Здесь $R$ – радиус Земли, $r$ – радиус лунной полутени. Последнюю величину можно легко определить из рисунка:




Если вершина конуса тени попадает на лимб Земли, то, с учетом несравнимых расстояний до Солнца и Луны радиус полутени $r$ равен диаметру Луны, 3476 км. Итак, угол $\gamma$ равен 74°, и вид Солнца и Луны в пункте **B** будет следующим:




В точке **B'** картина будет аналогичной, только диск Луны будет располагаться с другой стороны (слева) от диска Солнца.

**Система оценивания (от одного члена жюри).**

**1 этап: 2 балла.**
Правильное понимание положения тени и полутени Луны на Земле и расположения точек **A** и **B**, выраженное рисунком или текстовым описанием.
**2 этап: 2 балла.**
Указание, что угол $\gamma$ с вершиной в точке **B**, есть позиционный угол (относительно вертикали), под которым будет появляться ущерб на диске Солнца. Второй этап может выполняться вместе по ходу четвертого, что не является ошибкой.
**3 этап: 2 балла.**
Расчет размеров полутени Земли (либо прямого указания, что ее радиус равен диаметру Луны, что также считается правильным, рисунок не является обязательным).
**4 этап: 2 балла.**
Вычисление угла $\gamma$. Рисунок, иллюстрирующий положение Луны на небе относительно Солнца, желателен, но не обязателен.

# XI.3 ФОКУС В ТОЧКЕ ЛАГРАНЖА

*С.Б. Борисов*

**Условие.** Планета обращается вокруг звезды с массой $M$ по круговой орбите с радиусом $R$. С нее стартует космический аппарат. Он выходит на эллиптическую орбиту вокруг звезды, у которой точка старта является апоцентром, а второй фокус (свободный от звезды) совпадает с текущим положением внутренней точки Лагранжа $L_1$ системы "планета-звезда". При каком отношении масс планеты и звезды ($m/M<1$) аппарат сможет без коррекций орбиты быстрее всего вернуться к планете? Взаимодействие аппарата с планетой не учитывать.

**Решение.** Для начала определим расстояние точки Лагранжа $L_1$ от планеты $r$. В этой точке физическое тело может вращаться вокруг звезды с той же угловой скоростью ω, что и планета. Запишем уравнения движения этого тела и планеты:

$$\omega^2(R-r) = \frac{GM}{(R-r)^2} - \frac{Gm}{r^2}; \quad \omega^2 R = \frac{GM}{R^2}.$$

Вычтем из второго уравнения первое:

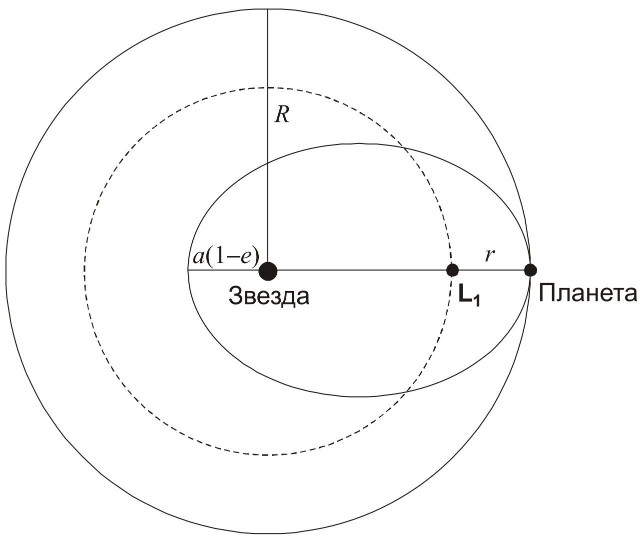
$$\frac{GMr}{R^3} = \frac{Gm}{r^2} + \left(\frac{GM}{R^2} - \frac{GM}{(R-r)^2}\right).$$

Воспользовавшись формулами для приближенного вычисления, получаем

$$\frac{GMr}{R^3} = \frac{Gm}{r^2} - \frac{2GMr}{R^3}.$$

В итоге имеем:

$$r = R \cdot \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3}.$$




Коль скоро масса планеты меньше массы звезды, точка $L_1$ располагается недалеко от планеты. Орбита аппарата – эллиптическая. Апоцентр орбиты аппарата – единственная ее точка, где он может вернуться к планете. Наиболее быстрое возвращение может случиться через один оборот планеты, когда она сама окажется в этой точке. Тогда орбитальный период аппарата $t$ должен быть равен $T/N$, где $T$ – орбитальный период планеты, а $N$ – натуральное число. Считая массу планеты малой по сравнению с массой звезды и не учитывая взаимодействие аппарата с планетой, получаем выражение для большой полуоси орбиты аппарата

$$a = R \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^{2/3}.$$

Физический смысл имеет только случай с $N$=2, так как уже при $N$=3 мы получим значение $a$, меньшее $R/2$, что невозможно для апоцентра аппарата на расстоянии $R$. Исходя из расстояния в апоцентре, получаем значение эксцентриситета орбиты:

$$e = \frac{R}{a} - 1 = 2^{2/3} - 1 = 0.59.$$

Точка $\mathbf{L_1}$ является фокусом эллипса, и $a(1-e)=r$:

$$R \cdot (2^{1/3} - 1) = R \cdot \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3}.$$

Отсюда получаем соотношение масс планеты и звезды

$$\frac{m}{M} = 3 \cdot (2^{1/3} - 1)^3 \approx 0.05.$$

**Система оценивания (от одного члена жюри).** Решение задачи разбивается на несколько этапов, которые могут выполняться в произвольной последовательности.

**1 этап: 3 балла.**
Выражение для расстояния между планетой и точкой Лагранжа, которое можно вывести или взять как известное. Участники могут рассматривать более общий случай произвольного соотношения масс двух тел при вычислении положения точки Лагранжа. Это не считается ошибкой и оценивается полностью при условии правильности вычислений.
**2 этап: 2 балла.**
Формулировка условия скорейшего возвращения аппарата к планете. При этом нужно обосновать, что смысл имеет только случай $N$=2 (аппарат делает два, а не какое-либо другое целое число оборотов вокруг звезды). Если этого не делается и рассматривается только случай $N$=2, оценка уменьшается на 1 балл.
**3 этап: 3 балла.**
Вычисление отношения масс.

# XI.4 ЭФФЕКТ ПОЙНТИНГА-РОБЕРТСОНА

*О.С. Угольников*

**Условие.** Суть известного эффекта Пойнтинга-Робертсона состоит в тормозящем действии боковых солнечных фотонов, имеющих встречную компоненту скорости относительно тела, движущегося вокруг Солнца. Как и насколько изменит расстояние от Солнца за один оборот сферическая графитовая частица радиусом 10 мкм и плотностью 2.1 г/см$^3$, изначально обращающаяся по орбите радиусом 1 а.е. и эксцентриситетом, равным нулю?

**Решение.** Вначале обратим внимание, что кроме эффекта Пойтинга-Робертсона на частицу будет действовать световое давление, основная компонента которого направлена от Солнца. Определим силу светового давления на расстоянии 1 а.е. от Солнца:

$$F_S = \frac{J_0}{4\pi R^2} \cdot \frac{\pi r^2}{c} = S\frac{\pi r^2}{c} = 1.4 \cdot 10^{-15}\ H.$$

Здесь $J_0$ – светимость Солнца, $R$ – расстояние от Солнца до пылинки, $r$ – радиус пылинки, $S$ – солнечная постоянная. Мы учли, что пылинка графитовая, и свет в ней поглощается. Сила притяжения со стороны Солнца направлена в другую сторону и равна

$$F_G = \frac{GMm}{R^2} = \frac{4GM\rho r^3}{3R^2} = 1.7 \cdot 10^{-14}\ H.$$

Здесь $M$ и $m$ – массы Солнца и пылинки, ρ – плотность пылинки. Для частиц такого размера сила светового давления в 12 раз меньше силы притяжения. Важно понимать, что сила светового давления не приводит к изменению радиуса орбиты частицы, так как она продолжает двигаться в центральном поле Солнца с эффективной силой притяжения, зависящей от радиуса как $1/R^2$. Мы можем дальше не учитывать эту силу либо проводить расчеты с эффективной массой Солнца $M'$, равной $0.92M$.

Сила Пойнтинга-Робертсона несравнимо меньше светового давления, но она направлена навстречу движения пылинки и поэтому будет изменять ее орбиту. Величина силы равна

$$F_{PR} = F_S\frac{v}{c} = \frac{J_0}{4\pi R^2} \cdot \frac{\pi r^2 v}{c^2}.$$

Здесь $v$ – скорость пылинки. Работа этой силы за один оборот отрицательна и равна

$$A_{PR} = -F_{PR} \cdot 2\pi R = -\frac{J_0}{2R} \cdot \frac{\pi r^2 v}{c^2}.$$

Эта работа приводит к изменению полной энергии пылинки, равной для кругового вращения

$$E = -\frac{GM'm}{2R}.$$

Обозначим изменение радиуса орбиты как $\Delta R$ и учтем, что эта величина существенно меньше $R$. Тогда

$$-\frac{GM'm}{2(R+\Delta R)} = -\frac{GM'm}{2R} - \frac{J_0}{2R} \cdot \frac{\pi r^2 v}{c^2}.$$

В соответствии с формулами для малых приращений

$$\frac{1}{R+\Delta R} \approx \frac{1}{R} - \frac{\Delta R}{R^2}.$$

Подставляя это в предыдущую формулу, имеем:

$$-\frac{GM'm\Delta R}{2R^2} = \frac{J_0}{2R} \cdot \frac{\pi r^2 v}{c^2}.$$

Изменение радиуса орбиты за один оборот составит

$$\Delta R = -\frac{J_0 \pi r^2 vR}{GM' mc^2} = -\frac{J_0 \pi r^2}{mc^2}\sqrt{\frac{R}{GM'}} = -\frac{3J_0}{4\rho rc^2}\sqrt{\frac{R}{GM'}} \approx -5000 \text{ км}.$$

**Система оценивания (от одного члена жюри).**

**1 этап: 1 балл.**
Проверка, что данная пылинка может обращаться по круговой орбите и не будет выброшена световым давлением, либо вычисление эффективной массы Солнца (его положительная величина автоматически означает выполнение проверки). В случае этой проверки в последующем решении участник может пользоваться как эффективной, так и обычной массой Солнца, что не является ошибкой.
**2 этап: 3 балла.**
Запись выражения для силы Пойнтинга-Робертсона.
**3 этап: 4 балла.**
Вычисление изменения радиуса орбиты за один оборот. Если участник олимпиады путает полную и кинетическую энергию частицы, получая тот же численный ответ, но с другим знаком (изменение кинетической, а не полной энергии, уменьшение скорости и удаление частицы от Солнца), эти 4 балла не выставляются.

# XI.6 МЕЖЗВЕЗДНЫЙ ЭКРАН

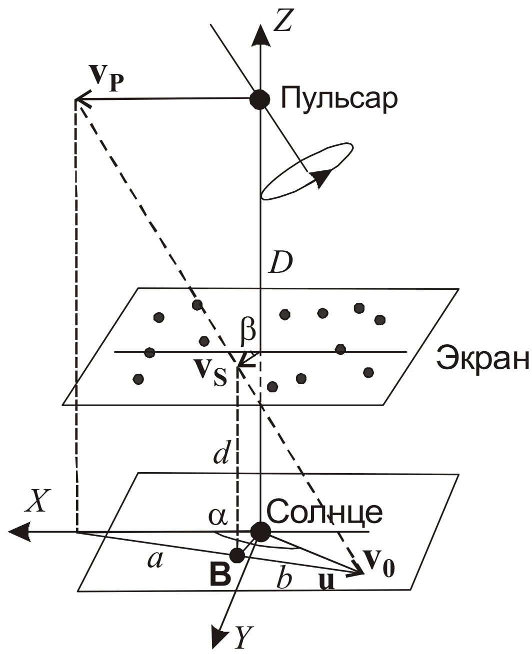
*Е.Н. Фадеев*

**Условие.** Излучение пульсара на пути к Земле проходит через тонкий рассеивающий слой (экран), расположенный на расстоянии двух третей пути до наблюдателя. В результате рассеяния на неоднородностях этого слоя к наблюдателю приходит не один луч, а множество, которые образуют интерференционную картину. Известно, что пульсар расположен на расстоянии 1 кпк от Солнца, его собственное движение равно 65 миллисекунд дуги в год. Измерения показали, что дифракционная картина движется относительно Солнца в плоскости, перпендикулярной направлению на пульсар, со скоростью 100 км/с под углом 150° к направлению движения пульсара. Определите возможные значения скорости и направления движения среды, составляющей экран.

**Решение.** Вначале определим величину тангенциальной скорости пульсара, исходя из его собственного движения $\mu$ и расстояния до него $D$:

$$v_P \text{ (км/с)} = 4.74\ \mu(''/\text{год})\ D \text{ (пк)} = 308 \text{ км/с}.$$

Введём декартову систему координат с центром в Солнце (рисунок). Ось $Z$ направим на пульсар, ось $X$ – параллельно тангенциальной скорости пульсара. Пусть $\mathbf{v}_0$, $v_P$ и $\mathbf{v}_S$ – векторы скоростей дифракционной картины, пульсара и экрана соответственно, $\alpha$=150° – угол между $\mathbf{v}_0$ и осью $X$, $\beta$ – угол между $\mathbf{v}_S$ и осью $X$.




Рассмотрим движение пульсара и экрана на некотором интервале времени. Отметим, что этот интервал мал, и перемещения пульсара и экрана несопоставимо меньше их расстояния до Солнца. В этом случае линия, соединяющая пульсар и наблюдателя, все время образует очень малый угол с осью Z. Лучевые скорости экрана и пульсара не влияют на ситуацию, и мы их в расчет не принимаем.

Пусть в начальный момент времени пульсар находился на расстоянии $D$ на оси $Z$. Тогда через некоторое время $t$ его координаты будут $(v_p t,\ 0,\ D)$. За это же время то дифракционное пятно, которое находилось в начале координат, сместится в точку с координатами $(v_0 t\cos\alpha,\ v_0 t\sin\alpha,\ 0)$. Это дифракционное пятно сформировано лучами, которые в начальный момент времени проходили через область экрана вблизи оси $Z$. За время $t$ центр этой области сместился в точку $(v_S t\cos\beta,\ v_S t\sin\beta,\ d)$. Здесь $d$ – расстояние от Земли до экрана. Очевидно, что все три точки (пульсар, центр пятна рассеяния на экране и центр дифракционного пятна) находятся на одной прямой. Спроектируем эту прямую на плоскость $OXY$, получив вектор $\mathbf{u}t$. Сделаем то же самое с векторами перемещения пульсара и экрана, которые параллельны данной плоскости. Опустив постоянный множитель $t$, мы можем записать в векторном виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v_0} - \mathbf{v_P}.$$

Проекция центра пятна рассеяния на экране на плоскость $OXY$ обозначена на рисунке как **B**. Она делит вектор **u** на части. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{b}{d} = \frac{a+b}{D}.$$

Из этого мы можем записать выражение для тангенциального перемещения экрана:

$$\mathbf{v_S} = \mathbf{v_0} - \frac{b}{a+b}\mathbf{u} = \mathbf{v_0} - \frac{d}{D}\mathbf{u} = \frac{D-d}{D}\mathbf{v_0} + \frac{d}{D}\mathbf{v_P}.$$

Отсюда мы можем вычислить скорость и направление перемещения экрана, учитывая, что $D=3d$, $s=(D-d)/D=2/3$. Разложим вектора по координатным осям:

$$v_S \cos\beta = \frac{D-d}{D} v_0 \cos\alpha + \frac{d}{D} v_P; \quad v_S \sin\beta = \frac{D-d}{D} v_0 \sin\alpha.$$

Разделим второе уравнение на первое:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{sv_0 \sin\alpha}{sv_0 \cos\alpha + (1-s)v_P}. \quad \beta = arctg\,\frac{sv_0 \sin\alpha}{sv_0 \cos\alpha + (1-s)v_P} = 37^O.$$

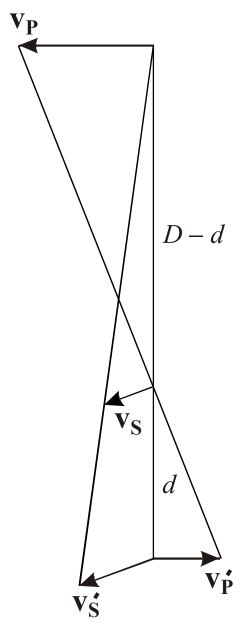
Теперь возведем оба уравнения системы в квадрат и сложим:

$$v_S^2 = s^2 v_0^2 \sin^2\alpha + s^2 v_0^2 \cos^2\alpha + (1-s)^2 v_p^2 + 2s(1-s)v_0 v_p \cos\alpha\,,$$

$$v_S = \sqrt{(1-s)^2 v_P^2 + s^2 v_0^2 + 2s(1-s)v_P v_S \cos\alpha} = 56\ \textit{км}/\text{с}.$$

К этому же ответу можно прийти другим способом. Предположим, что экран неподвижен. Тогда движение дифракционной картины будет определяться только движением пульсара. Дифракционная картина будет двигаться со скоростью

$$v_P{}' = \frac{d}{D-d} v_P = \frac{1-s}{s} v_P.$$




Аналогично, если пульсар покоится, а движется только экран. Тогда скорость дифракционной картины будет неизменной и составит

$$v_S{}' = \frac{D}{D-d} v_S = \frac{1}{s} v_S.$$

В случае, когда и пульсар, и экран движутся, смещение дифракционной картины будет векторной суммой этих двух векторов. Поскольку нам известен угол α, воспользуемся теоремой косинусов:

$$v_S{}'^2 = v_0^2 + v_P{}'^2 - 2v_0 v_P{}' \cos(\pi - \alpha)\,,$$

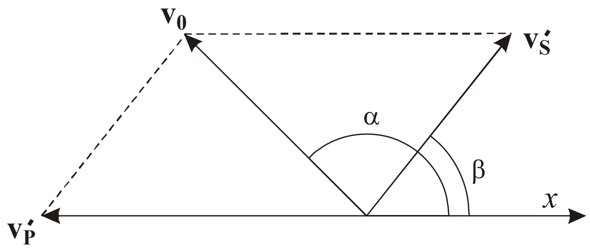
$$\frac{v_S^2}{s^2} = v_0^2 + \frac{(1-s)^2}{s^2} v_P^2 + 2v_0 \frac{1-s}{s} v_P \cos\alpha \,,$$

$$v_S = \sqrt{(1-s)^2 v_P^2 + s^2 v_0^2 + 2s(1-s) v_P v_S \cos\alpha} = 56 \text{ км/с}.$$

Мы пришли к тому же ответу. Для нахождения угла β воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{v_0}{\sin\beta} = \frac{v_S{}'}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{v_S}{s \cdot \sin\alpha} \,,$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{s v_0}{v_s}\sin\alpha\right) \approx 37° \,.$$




Наконец, запишем третий вариант решения задачи. Уравнение прямой в пространстве в симметричной форме имеет вид

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2} = \frac{z-z_2}{z_1-z_2}.$$

Запишем в такой форме уравнение прямой, соединяющей концы векторов $\mathbf{v}_P$ и $\mathbf{v}_0$, понимая под координатами с индексами 1 и 2 координаты концов векторов $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_P$, а без индекса – $\mathbf{v}_S$:

$$\frac{v_S\cos\beta - v_P}{v_0\cos\alpha - v_P} = \frac{v_S\sin\beta}{v_0\sin\alpha} = \frac{d-D}{-D} = \frac{D-d}{D} = s \,.$$

На самом деле, это система из двух независимых уравнений. Решая эту систему, мы придем к такому же результату, как и в первом варианте решения задачи.

**6. Система оценивания (от одного члена жюри).**

**1 этап: 2 балла.**
Правильная геометрическая модель происходящего явления.
**2 этап: 1 балл.**
Вычисление тангенциальной скорости пульсара.
**3 этап: 1 балл.**
Получение векторной формулы (или системы из двух формул в проекциях) для связи скоростей пульсара, экрана и интерференционной картины.
**4 этап: 2 балла.**
Получение формул для величины и направления скорости экрана (по 1 баллу за каждую).
**5 этап: 2 балла.**
Определение численных значений величины скорости и угла (по 1 баллу за каждое).