9 класс

1. Минимальный путь

Автомобиль, едущий со скоростью υ_0, в некоторый момент начинает движение с таким постоянным ускорением, что за время τ пройденный им путь s оказывается минимальным. Определите этот путь s.

Возможное решение **Слободянин В.**

Чтобы путь, пройденный за время τ, был минимальным, автомобиль должен начать тормозить. Пусть t_1 – время, прошедшее с момента начала торможения до момента остановки автомобиля. (Вместо t_1 в качестве параметра задачи можно ввести конечную скорость υ_1 автомобиля). После этого момента автомобиль начнёт разгоняться в обратном направлении. Пройденный путь

$$s = \frac{\upsilon_0 t_1}{2} + \frac{\upsilon_0}{t_1}\frac{(\tau - t_1)^2}{2} = \frac{\upsilon_0}{2}\left(t_1 + \frac{(\tau - t_1)^2}{t_1}\right).$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\frac{2st_1}{\upsilon_0} = t_1^2 + (\tau - t_1)^2.$$

Это квадратное уравнение относительно переменной t_1. Приведём его к виду

$$t_1^2 - \left(\tau + \frac{s}{\upsilon_0}\right)t_1 + \frac{\tau^2}{2} = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$\left(\tau + \frac{s}{\upsilon_0}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\tau\right)^2 = \left(\tau + \frac{s}{\upsilon_0} - \sqrt{2}\tau\right)\left(\tau + \frac{s}{\upsilon_0} + \sqrt{2}\tau\right).$$

Из анализа первого сомножителя находим, что путь, пройденный за время τ, минимален при условии

$$s = \left(\sqrt{2} - 1\right)\tau\upsilon_0.$$

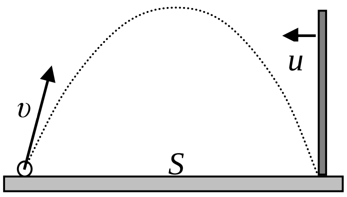
Критерии оценивания

1. В результате анализа движения, например, графика $\upsilon(t)$, указано на то, что скорость в течение времени τ должна сменить знак **2 балла**
2. Записано выражение для пройденного пути (через ускорение, или время t_1 движения автомобиля до остановки, или конечную скорость υ_1) **4 балла**

   2 балла за выражение для пути до остановки и **2 балла** - за оставшуюся часть пути
3. В результате решения квадратного уравнения получено выражение для времени t_1 движения до момента остановки автомобиля или для конечной скорости υ_1 автомобиля **3 балла**
4. Получен окончательный ответ **1 балл**

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** *составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале* **online.mipt.ru**

2. Отражение в полете



В баллистической лаборатории при проведении эксперимента по изучению упругого отражения от движущихся препятствий производился выстрел маленьким шариком из небольшой катапульты, установленной на горизонтальной поверхности. Одновременно из точки, в которую по расчетам должен был упасть шарик, с постоянной скоростью начинала движение навстречу массивная вертикальная стенка (см. рисунок). После упругого отражения от стенки, шарик падал на некотором расстоянии от катапульты. Затем эксперимент повторяли, изменяя **только** скорость движения стенки. Оказалось, что в двух экспериментах удар шарика о стенку произошел на одной и той же высоте h. Определите эту высоту, если известно, что время полета шарика до отражения в первом случае составило t_1 = 1 с, а во втором t_2 = 2 с. На какую максимальную высоту H поднимался шарик за весь полет? Чему равна начальная скорость шарика υ, если расстояние между местами его падения на горизонтальную поверхность в первом и втором экспериментах составило L = 9 м? Определите скорости равномерного движения стенки u_1 и u_2 в этих экспериментах и начальное расстояние S между стенкой и катапультой. Считайте g = 10 м/с^2.

Примечание. В системе отсчёта, связанной со стенкой, модули скорости шарика до и после столкновения одинаковы, а угол отражения шарика равен углу падения.

Возможное решение **Замятнин М.**

Вертикальное перемещение шарика описывается уравнением $h = \upsilon_в t - \frac{gt^2}{2}$, которое можно переписать в виде: $t^2 - 2\frac{\upsilon_в}{g}t + \frac{2h}{g} = 0$ (здесь $\upsilon_в$ – проекция начальной скорости на вертикальную ось). По теореме Виета время всего полета $t_1 + t_2 = \frac{2\upsilon_в}{g}$ и $t_1 t_2 = \frac{2h}{g}$, откуда высота, на которой произошел отскок $h = \frac{g t_1 t_2}{2}$=10 м и $\upsilon_в = \frac{g(t_1 + t_2)}{2}$=15 м/с. Заметим, что при отражении от стенки вертикальная составляющая скорости шарика не изменяется, поэтому максимальная высота полета определяется лишь начальной вертикальной скоростью $\upsilon_в$ и равна $H = \frac{\upsilon_в^2}{2g} = \frac{g(t_1 + t_2)^2}{8}$=11,25 м.

Горизонтальные перемещения шарика и стенки до момента столкновения связаны следующими соотношениями: $\upsilon_г t_2 = u_1 t_1$ и $\upsilon_г t_1 = u_2 t_2$, так как стенка проходит то расстояние, которое «не успевает» пролететь до падения шарик. Откуда $u_1 = \upsilon_г t_2 / t_1$ и $u_2 = \upsilon_г t_1 / t_2$.

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** *составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале* **online.mipt.ru**

В момент столкновения шарика со стенкой горизонтальная скорость шарика изменяет свое направление на противоположное и увеличивается на удвоенную скорость стенки (это можно показать, рассмотрев упругий отскок из системы отсчета, в которой стенка покоится). Вертикальная скорость шарика при отражении не изменяется, и дальнейший полет до падения длится столько же времени, как и в отсутствии удара. Тогда проекции перемещения шарика от катапульты до мест падения могут быть найдены по формулам:

$$L_1 = \upsilon_г t_1 - (\upsilon_г + 2u_1)t_2 = \upsilon_г\left(t_1 - t_2 - 2\frac{t_2^2}{t_1}\right) \text{ и } L_2 = \upsilon_г t_2 - (\upsilon_г + 2u_2)t_1 = \upsilon_г\left(t_2 - t_1 - 2\frac{t_1^2}{t_2}\right).$$

Здесь за положительное направление принято направление от катапульты к стенке.

Расстояние между точками падения равно $L = L_2 - L_1 = 2\upsilon_г\left(t_2 - t_1 + \frac{t_2^2}{t_1} - \frac{t_1^2}{t_2}\right)$, откуда

$$\upsilon_г = \frac{L}{2}\left(\frac{t_1 t_2}{(t_1 + t_2)^2 (t_2 - t_1)}\right) = 1 \text{ м/с}.$$

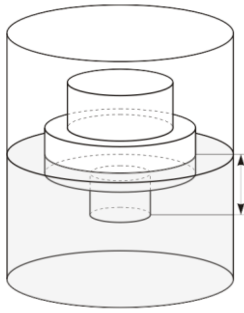
Окончательно $\upsilon = \sqrt{\upsilon_г^2 + \upsilon_в^2} \approx 15$ м/с, горизонтальная дальность полета шарика (начальное расстояние между катапультой и стенкой) $S = \upsilon_г(t_1 + t_2)$ = 3 м, скорости стенки u_1 = 2 м/с и u_2 = 0,5 м/с.

Критерии оценивания

1.	Найдена высота, на которой произошло отражение (в т.ч. число 0,5 балла)	**1 балл**
2.	Найдена максимальная высота полета (в т.ч. число 0,5 балла)	**1 балл**
3.	Связь между горизонтальной скоростью шарика и скоростями стенки	**1 балл**
4.	Учтено сохранение вертикальной скорости шарика до и после отражения	**1 балл**
5.	Определена горизонтальная скорость шарика после отражения	**1 балл**
6.	Найдены расстояния от катапульты до мест падения шарика	**1 балл**
7.	Найдено начальное расстояние от катапульты до стенки	**1 балл**
8.	Найдена начальная скорость шарика	**1 балл**
9.	Получены численные значения υ, S, u_1, u_2 (по 0,5 балла)	**2 балла**

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** *составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале* **online.mipt.ru**

3. Трехцилиндровый



Тело, склеенное из трех соосных цилиндров разного поперечного сечения и разной высоты, погружают в некоторую жидкость и снимают зависимость силы Архимеда F, действующей на тело, от глубины h его погружения. Известно, что площадь сечения самого узкого (не факт, что самого нижнего) цилиндра $S = 10$ см^2. Постройте график зависимости $F(h)$ и с его помощью определите высоту каждого из цилиндров, площади сечения двух других цилиндров и плотность жидкости. В процессе эксперимента ось вращения цилиндров оставалась вертикальной, $g = 10$ м/с^2.

h, см	0	1	3	6	8	11	12	13	15	17	18	20	21	22	23	25	27
$F_а$, Н	0	0,3	0,9	1,8	2,4	3,6	4,2	4,8	6,0	7,2	7,3	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	7,9

Возможное решение

Гордеев З.

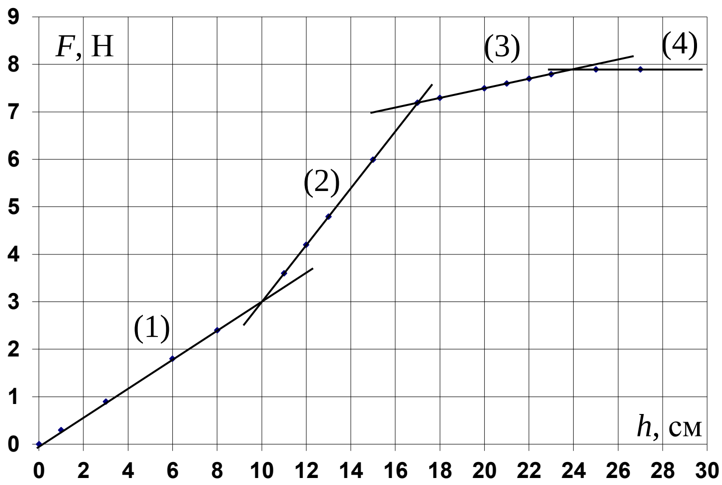


График зависимости $F(h)$ имеет три излома, которые соответствуют изменению площади сечения тела и полному его погружению. Заметим, что положение изломов находится путем экстраполяции линейных зависимостей до их пересечения (в точках 10 см, 17 см и 24 см), поэтому опираться только на табличные данные при определении высот цилиндров нельзя. В области с $h < 24$ см самый пологий участок графика третий, следовательно, на нем наименьшая площадь поперечного сечения S. Угловой коэффициент наклона первого участка в три раза больше, следовательно, его сечение $3S = 30$ см^2. На втором участке угловой коэффициент наклона больше в 6 раз, а его площадь сечения $6S = 60$ см^2. Длины цилиндров 10 см, 7 см и 7 см соответственно. Плотность жидкости можно h, см

определить, например, по третьему участку: $\rho = \dfrac{\Delta F}{Sg\Delta h}$ =1000 кг/м^3.

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** *составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале* **online.mipt.ru**

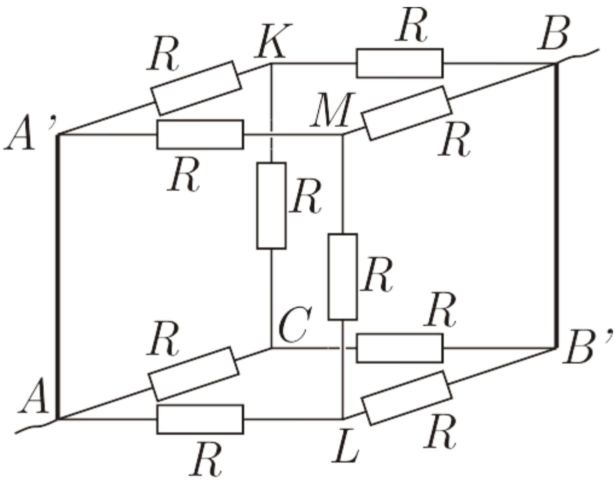
Критерии оценивания

• Построен график зависимости $F(h)$		**1 балл**
• На графике выделено 4 участка		**0,5 балла**
• Экстраполяция участков до пересечения		**0,5 балла**
• Определение длин цилиндров – по 1 баллу за каждое		**3 балла**
• Если отклонение менее 1 см, то по 1 баллу Если отклонение от 1 см до 2 см, то 0,5 балла за каждое		
• Определение сечений (по 2 балла за каждое)		**4 балла**
• Если отклонение менее 10%,	2 балла за каждое	
• Если отклонение от 10% до 20%,	1 балл за каждое	
• Если отклонение больше 20%,	0 баллов	
• Определена плотность жидкости (если отклонение менее 10%) иначе **– 0 баллов.**		**1 балл**

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** *составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале* **online.mipt.ru**

4. Два в кубе

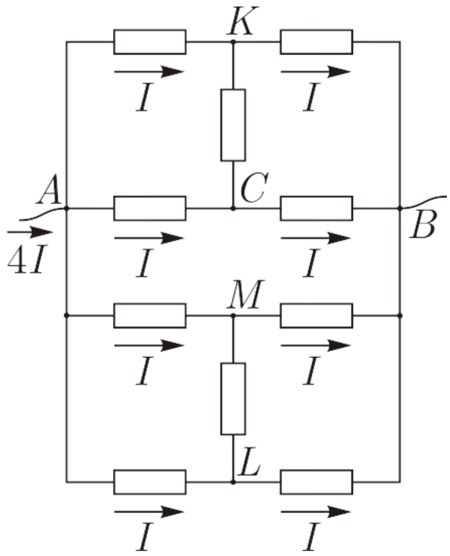
Куб собран из одинаковых резисторов сопротивлением *R*. Два резистора заменили на идеальные перемычки, как указано на рисунке.



- Найдите общее сопротивление получившейся системы между контактами A и B.
- Какие резисторы из оставшихся можно убрать, чтобы это не изменило общее сопротивление системы?
- Если известно, что через большинство резисторов в цепи течет ток $I = 2$ А, вычислите силу тока в проводе, подсоединенном к узлу A (или B)?
- Вычислите силу тока, текущего через идеальную перемычку AA`?

Возможное решение **Иванов М.**

Изобразим эквивалентную схему и расставим токи в ветвях с учетом закона сохранения заряда и закона Ома (сила токов обратно пропорциональна сопротивлениям параллельных ветвей).



Теперь легко дать ответы на вопросы задачи. В силу симметрии схемы, токи через резисторы в ветвях KC и ML не идут. Следовательно, эти резисторы можно убрать, и это не приведет к перераспределению токов в цепи и изменению общего сопротивления, которое равно

$$R_o = \frac{U_o}{I_o} = \frac{2IR}{4I} = \frac{1}{2}R\,.$$

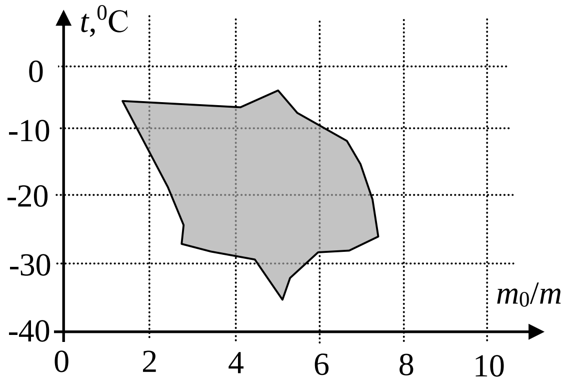
По условию $I = 2$ А. Следовательно, сила тока, входящего в узел A, равна $4I = 8$А. Сила тока через идеальную перемычку AA` равна сумме токов через резисторы в ветвях A`K и A`M: $2I = 4$ А.

Критерии оценивания

- Правильная эквивалентная схема **2 балла**
- Обосновано отсутствие токов через два резистора **2 балла**
- Найдено общее сопротивление **2 балла**
- Определен общий ток **2 балла**
- Найден ток через перемычку **2 балла**

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** *составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале* **online.mipt.ru**

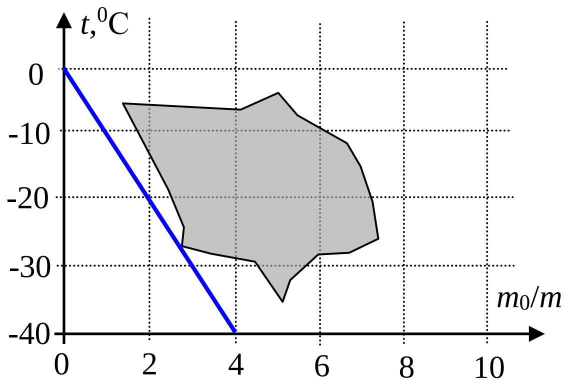
5. Ледяное пятно



Определите, какая максимальная масса $m_п$ водяного пара, взятого при температуре 100^0С, может потребоваться для нагревания льда, находящегося в калориметре, до температуры плавления (без плавления). Точная масса льда и его начальная температура не известны, но эти значения могут лежать в области, выделенной на диаграмме серым цветом. Удельная теплота парообразования L = 2,30 МДж/кг, удельная теплота плавления льда λ = 340 кДж/кг, удельная теплоемкость воды c = 4 200 Дж/(кг·^{0}С), удельная теплоемкость льда c_1 = 2 100 Дж/(кг·^{0}С). Масса льда m на диаграмме приведена в условных единицах, показывающих, во сколько раз масса льда меньше, чем m_0 = 1 кг. Теплоемкостью калориметра и потерями тепла пренебречь.

Возможное решение **Замятнин М.**

Запишем уравнение теплового баланса для конденсирующегося (превращающегося в воду) пара, остывающей и кристаллизующейся воды и нагревающегося льда: $m_п(L + c(t_{кип} - t_0) + \lambda) = mc_1(t_0 - t)$, откуда $m_п = \dfrac{mc_1(t_0 - t)}{L + c(t_{кип} - t_0) + \lambda}$, или с учетом того, что $t_0 = 0^0$С, получим: $m_п = \dfrac{-mtc_1}{L + ct_{кип} + \lambda}$ (здесь и далее учтено, что $t < 0$). Максимальная масса пара потребуется при максимальном по модулю значении произведения mt. Одинаковым значениям произведения mt соответствуют точки, лежащие на прямых, проведенных из начала координат. Действительно, для этих прямых выполняется условие $t = \alpha \dfrac{m_0}{m}$, или $mt = \alpha m_0 = const$, где α - угловой коэффициент наклона прямой. Чем больше угол наклона прямой, тем больше модуль произведения mt. Из графика видно, что для прямой проведенной из начала координат, касающейся области возможных параметров льда и имеющей максимальный угол наклона, значение коэффициента $\alpha = -10^0$С. Следовательно, максимальная масса пара потребуется при значении произведения $mt = -10$ кг·^{0}С. С учетом этого, получим $m_п \approx 6{,}9$ г.



Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** *составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале* **online.mipt.ru**

Критерии оценивания

1. Составлено уравнение теплового баланса **2 балла**
2. Правильно указано, при каком условии количество пара максимально **2 балла**
3. Предложен способ нахождения максимального значения модуля mt **2 балла**
4. Правильно проведена касательная к области допустимых параметров льда **1 балл**
5. Найдено значение mt **1 балл**
6. Определена максимальная масса пара **2 балла**

В п.6 имеет смысл ввести широкие 10% (**1 балл**) и узкие 5% (**2 балла**) «ворота», так как при решении обрабатывается графическая информация. Но, за ответы, попавшие в эти ворота при неверных исходных предположениях (п.п. 3-5), баллы ставиться не должны!

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** *составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале* **online.mipt.ru**