

Решения и критерии оценивания

Задача 1

Деревянный цилиндр плавает в цилиндрическом сосуде с водой, как показано на рис. 1, выступая на $a = 60$ мм над уровнем жидкости, который равен $h_1 = 300$ мм. На верхнюю поверхность цилиндра ставят алюминиевый кубик так, что цилиндр полностью погружается в воду (верхняя поверхность цилиндра совпадает с уровнем воды, рис. 2). При этом уровень воды в сосуде становится равным $h_2 = 312$ мм. Затем сосуд слегка толкнули, кубик съехал с поверхности цилиндра и утонул. Найдите уровень воды h_3 , который установился после этого в сосуде. Плотность воды $\rho_0 = 1,0$ г/см³, плотность алюминия $\rho_1 = 2,7$ г/см³.

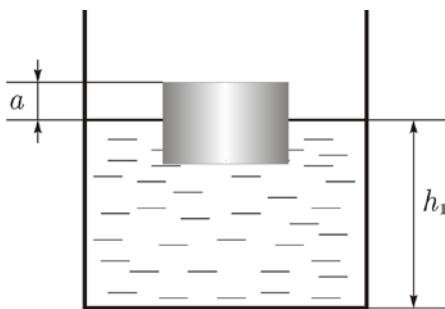


Рис. 1

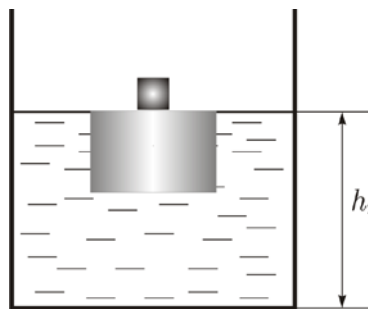


Рис. 2

Решение

Пусть s – площадь поперечного сечения деревянного цилиндра. После того, как на цилиндр поставили кубик, объём погруженной в воду части увеличился на as , вследствие чего уровень воды поднялся на $h_2 - h_1$. Поскольку объём воды постоянен,

$$as = (h_2 - h_1)S,$$

где S – площадь сечения сосуда, откуда

$$\frac{S}{s} = \frac{a}{h_2 - h_1} = 5.$$

Сила тяжести, действующая на кубик, равна изменению силы Архимеда, действующей на цилиндр:

$$\rho_1 V g = \rho_0 g s a,$$

откуда объём кубика $V = \frac{\rho_0 S a}{\rho_1}$.

В конечный момент цилиндр плавает, как и вначале, а кубик вытесняет объём воды, равный V . Таким образом, новый уровень воды в сосуде

$$h_3 = h_1 + \frac{V}{S} = h_1 + \frac{\rho_0 S}{\rho_1 S} a = h_1 + \frac{\rho_0}{\rho_1} (h_2 - h_1) \approx 304,4 \text{ мм.}$$

Критерии оценивания

- Записана связь изменения уровня $h_2 - h_1$ с размерами цилиндра..... **1 балл**
Найдено отношение S/s **2 балла**
Записано равенство силы тяжести кубика и изменения силы Архимеда **1 балл**
Найден объём кубика..... **2 балла**
Получен ответ..... **4 балла**

Максимум за задачу – 10 баллов.

Задача 2

Первую часть пути автомобиль ехал с постоянной скоростью 100 км/ч, а вторую – с постоянной скоростью 80 км/ч, причём вторая часть пути заняла на 1 ч больше. Всего автомобиль проехал 440 км. Какова его средняя скорость?

Решение

Пусть первая часть пути заняла время t . Если бы и вторая часть пути заняла время t , то автомобиль проехал бы на 80 км меньше, то есть 360 км. Но с другой стороны, этот же путь был бы равен

$$\left(100 \frac{\text{км}}{\text{ч}} + 80 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right) \cdot t = 180 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot t = 360 \text{ км,}$$

откуда $t = 2$ ч. Значит, всего автомобиль ехал в течение 5 часов и его средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{440 \text{ км}}{5 \text{ ч}} = 88 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Критерии оценивания

- Записано какое-либо уравнение, позволяющее в конечном итоге найти одно из неизвестных времён..... **3 балла**
Записанное уравнение решено **3 балла**
Получен ответ..... **4 балла**

Максимум за задачу – 10 баллов.

Задача 3

Школьники Витя и Юра плавают в бассейне на соседних дорожках (длина бассейна 25 м). Они стартуют одновременно с одной стороны бассейна и затем плывут с постоянной скоростью (каждый со своей). Витя преодолевает дистанцию в 800 м за 13 минут 7 секунд, а Юра – дистанцию 1500 м за 23 минуты 38 секунд. Сколько раз за время заплыва ребята проплывали мимо друг друга? Начальный момент не считайте.

Решение

Витя проплыл $800 \text{ м} / 25 \text{ м} = 32$ длины бассейна за $13 \cdot 60 \text{ с} + 7 \text{ с} = 787 \text{ с}$, а Юра проплыл $1500 \text{ м} / 25 \text{ м} = 60$ длин бассейна за $23 \cdot 60 \text{ с} + 38 \text{ с} = 1418 \text{ с}$. К тому моменту, как Витя закончил заплыв, Юра проплыл $(787 \text{ с} / 1418 \text{ с}) \cdot 60 \approx 33,3$ длины бассейна, то есть примерно на 1,3 длины бассейна больше, чем Витя. Получается, что Юра плыл быстрее Вити. Проследим за Витей, пока он плыл от одного края бассейна к другому. За это время пловцы точно проплыли навстречу друг другу (поскольку вначале Юра находился между Витей и краем бассейна, к которому плыл Витя). Но могло быть и так, что после первой встречи Юра успел развернуться, обогнать Витю, снова развернуться и проплыть навстречу Вите. Но если бы это было так, то в момент обгона Юра должен был бы проплыть ровно на 2 длины бассейна больше, чем Витя. Однако к моменту Витино го финиша Юра проплыл всего на 1,3 длины бассейна больше, значит, обгона не было. Таким образом доказано, что за каждый промежуток времени, пока Витя плывёт от одного конца бассейна к другому, происходит ровно одна встреча, значит, всего встреч 32.

Критерии оценивания

Найдено, сколько длин бассейна проплыл Витя	1 балл
Найдено, сколько длин бассейна проплыл Юра	1 балл
Найдено, сколько длин бассейна проплыл Юра к моменту, когда Витя завершил заплыв	2 балла
Указано, что пока Витя плывёт от одного края бассейна к другому, происходит одна встреча (рассмотрена одна итерация)	3 балла
Объяснено, почему такая встреча может быть только одна	2 балла
Получен ответ	1 балл

Критерии оценивания при решении задачи другим способом («через скорости»)

Найдены скорости Вити и Юры.....	1 балл
Указано время совместного плавания.....	1 балл
Найдено расстояние, преодоленное Юрой к моменту финиша Вити.....	2 балла
Указано, что пока Витя плывёт от одного края бассейна к другому, происходит одна встреча (рассмотрена одна итерация)	3 балла
Объяснено, почему такая встреча может быть только одна.....	2 балла
Получен ответ.....	1 балл

Максимум за задачу – 10 баллов.

Задача 4

По длинной прямой однородной палочке слева направо со скоростью u ползёт маленькая улитка и катит перед собой лёгкий маленький шарик. Масса улитки m , а палочки M . Концы палочки опираются на две вертикальные пружины, расстояние между которыми L . Жёсткость левой пружины k , а правой $2k$. Длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы, а их нижние концы закреплены на одном горизонтальном уровне. В начальный момент улитка находится на левом крае палочки, над левой пружиной (рис. 3).

Определите, спустя какое время от начала движения улитки шарик начнёт скатываться по палочке в сторону правой пружины. Можно считать, что жёсткости пружин настолько велики, что угол наклона палочки всегда достаточно мал.

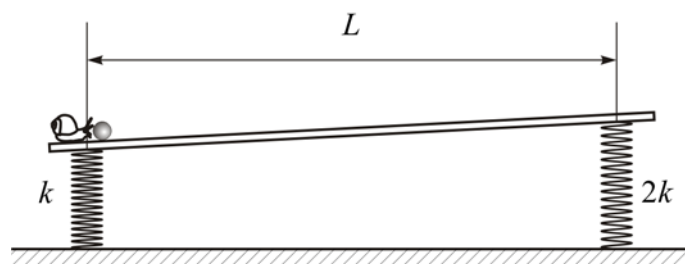


Рис. 3

Решение

Рассмотрим момент времени, когда улитка находится на расстоянии x от начального положения. Пусть в данный момент сила упругости левой пружины равна F_1 , а сила упругости правой пружины равна F_2 (рис. 3а). Тогда сжатие левой пружины равно

$$\Delta x_1 = \frac{F_1}{k},$$

а сжатие правой пружины равно

$$\Delta x_2 = \frac{F_2}{2k}.$$

Сумма сил, действующих на палочку, должна быть равна нулю:

$$F_1 + F_2 = (m + M)g.$$

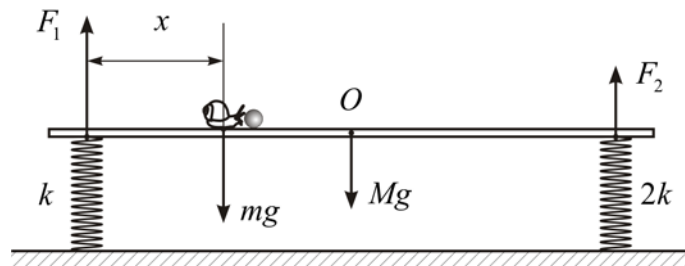


Рис. 3а

Запишем уравнение моментов относительно оси O , проходящей через центр масс палочки перпендикулярно плоскости рисунка:

$$F_1 \frac{L}{2} = mg \left(\frac{L}{2} - x \right) + F_2 \frac{L}{2}.$$

Как видно из этого уравнения, в начале движения (при небольших x) $F_1 > F_2$, а значит, и $\Delta x_1 > \Delta x_2$, то есть левый конец палочки находится ниже, чем правый. При таком положении палочки шарик стремится скатиться влево, но ему мешает улитка. Но как только правый край станет хоть немного ниже левого, шарик скатится. В критический момент, когда сжатия пружин равны, а палочка горизонтальна:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \Rightarrow F_2 = 2F_1;$$

$$F_1 + F_2 = 3F_1 = (m + M)g, \quad \text{откуда} \quad F_1 = \frac{(m + M)g}{3}.$$

Подставив полученное выражение в уравнение моментов, получим

$$\frac{(m + M)g}{3} \cdot \frac{L}{2} = mg \left(\frac{L}{2} - x \right) + 2 \cdot \frac{(m + M)g}{3} \cdot \frac{L}{2},$$

откуда

$$x = \frac{L}{2} + \left(\frac{m + M}{m} \right) \frac{L}{6} = \left(4 + \frac{M}{m} \right) \frac{L}{6}.$$

Значит, шарик начнёт скатываться спустя время

$$t = \frac{x}{u} = \left(4 + \frac{M}{m}\right) \frac{L}{6u}.$$

Критерии оценивания

Показано, что шарик начнёт скатываться, когда $F_2 = 2F_1$ **3 балла**

Записано равенство нулю всех сил, действующих на палочку **2 балла**

Записано уравнение моментов **2 балла**

Найдено положение улитки в момент, когда начнёт скатываться шарик **2 балла**

Найдено искомое время **1 балл**

Максимум за задачу – 10 баллов.

Максимальный балл за всю работу – 40.
--