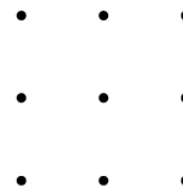
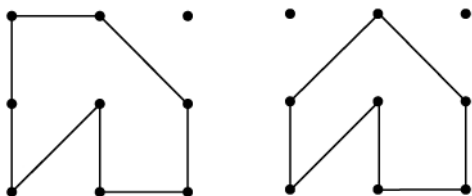


**9 класс.**

1. Отмечено 9 точек, как показано на рисунке. Нарисуйте два различных по форме семиугольника с вершинами в отмеченных точках. Для каждого семиугольника сделайте отдельный чертёж.



Ответ. Примеры семиугольников изображены на рисунке. Возможны и другие варианты.



Критерии проверки.

- Найдены два или более семиугольников – **7 баллов.**
- Найден один семиугольник – **3 балла.**

2. В тот день, когда Диму поздравляли с днём рождения его брат и сестра, Дима сказал: «Смотрите, как интересно, я теперь вдвое старше брата и втрое старше сестры!» – «А ваш средний возраст 11 лет», – подхватил папа. Сколько лет исполнилось Диме?

Ответ. 18 лет.

Решение. Первый способ. По условию задачи можно составить уравнение. Пусть возраст Димы –  $x$  лет, тогда возраст сестры  $x/3$ , а брата –  $x/2$ ;  $(x + x/3 + x/2):3=11$ . После решения этого уравнения получаем, что  $x=18$ . Диме исполнилось 18 лет.

Будет полезным привести несколько иное решение, «в частях».

Второй способ. Если возрасты Димы, его брата и сестры изобразить отрезками, то «Димин отрезок» состоит из двух «отрезков брата» или трех «отрезков сестры». Тогда, если возраст Димы поделить на 6 частей, то возраст сестры – две такие части, а возраст брата – три такие части. Тогда сумма их возрастов – 11 таких частей. С другой стороны, если средний возраст равен 11 лет, то сумма возрастов – 33 года. Откуда следует, что в одной части – три года. Значит, Диме исполнилось 18 лет.

Критерии проверки.

- Полное верное решение – **7 баллов.**
- Верно составлено уравнение, но при решении допущены ошибки – **3 балла.**
- Приведен верный ответ и выполнена проверка – **2 балла.**
- Приведен только верный ответ – **0 баллов.**

3. Однажды следователю пришлось допрашивать трёх свидетелей ограбления: Джона Уайта, Сэма Грэя и Боба Блэка. Джон уверял, что все показания Сэма – сплошная ложь, а Сэм только и делал, что твердил, будто Боб говорит неправду. Боб же всё это время уговаривал следователя не верить ни Уайту, ни, тем более, Грэю. Следователь, будучи человеком сообразительным и умным, попросил всех троих замолчать и, не задав более ни одного вопроса, быстро определил, с кем из них стоит иметь дело, а с кем – нет. Кто же из свидетелей не лгал?

Ответ. Сэм Грэй.

Решение. Из условия задачи ясно, что высказывания каждого из свидетелей произнесены по поводу высказываний остальных двух свидетелей. Рассмотрим заявление Боба Блэка. Если то, что он говорит – правда, то Сэм Грэй и Джон Уайт лгут. Но из того, что Джон Уайт лжет следует, что не все показания Сэма Грэя – сплошная ложь. А это противоречит словам Боба Блэка, которому мы решили поверить и который утверждает, что Сэм Грэй лжет. Итак, слова Боба Блэка не могут быть правдой. Значит, он солгал, и мы должны признать слова Сэма Грэя правдой, а следовательно, утверждения Джона Уайта – ложью. Ответ: не лгал Сэм Грэй.

Критерии проверки.

- Приведен полный верный анализ ситуации задачи и дан верный ответ – **7 баллов.**
- Приведен полный верный анализ ситуации, но по каким-либо причинам дан неверный ответ (например, вместо того, кто НЕ солгал, в ответе указаны те, кто солгал) – **6 баллов.**
- Приведен верный анализ ситуации, но по каким-либо причинам не дан верный ответ (например, доказано, что Боб Блэк лгал, но не сделаны дальнейшие выводы) – **4 балла.**
- Приведен верный ответ и показано, что он удовлетворяет условию задачи (проведена проверка), но не доказано, что ответ единственный – **3 балла.**
- Приведен только верный ответ – **1 балл.**
- Приведен верный ответ при неверных рассуждениях – **0 баллов.**

4. Сколько существует трёхзначных чисел, которые в 5 раз больше произведения своих цифр?

Ответ. Одно число 175.

Решение. Первый способ. В составе цифр, которыми записывается число, нет цифры 0, иначе не может быть выполнено условие задачи. Данное трехзначное число получено умножением на 5 произведения своих цифр, следовательно, оно делится на 5. Значит, его запись оканчивается цифрой 5. Получаем, что произведение цифр, умноженное на 5, должно делиться на 25. Заметим, что четных цифр в записи числа быть не может, иначе произведение цифр было бы равно нулю. Таким образом, трехзначное число должно делиться на 25 и не содержать четных цифр. Таких чисел только пять: 175, 375, 575, 775 и 975. Произведение цифр искомого числа должно быть меньше 200, иначе, умноженное на 5, даст четырехзначное число. Поэтому числа 775 и 975 заведомо не подходят. Среди оставшихся трех чисел только 175 удовлетворяет условию задачи.

Второй способ. Заметим (аналогично первому способу решения), что последняя цифра искомого числа – 5. Пусть  $a, b, 5$  – последовательные цифры искомого числа. По условию задачи имеем:  $100a + 10b + 5 = a \cdot b \cdot 5 \cdot 5$ . Поделив обе части уравнения на 5, получаем:  $20a + 2b + 1 = 5ab$ . После вычитания из обеих частей равенства  $20a$  и вынесения за скобки общего множителя в правой части, получаем:  $2b + 1 = 5a(b - 4a)$  (1). Учитывая, что  $a$  и  $b$  могут принимать натуральные значения от 1 до 9, получаем, что возможные значения  $a$  – только 1 или 2. Но  $a=2$  не удовлетворяет равенству (1), в левой части которого нечетное число, а в правой при подстановке  $a=2$  получается четное. Итак, единственная возможность  $a=1$ . Подставив это значение в (1), получаем:  $2b + 1 = 5b - 20$ , откуда  $b=7$ . Ответ: единственное искомого число – 175.

Критерии проверки.

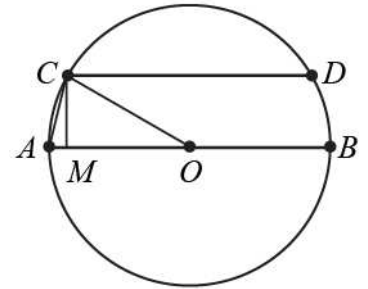
- Полное верное решение – **7 баллов.**
- Получен верный ответ и присутствуют рассуждения, существенно сокращающие перебор вариантов, но полного решения нет – **4 балла.**
- Верно составлено уравнение и приведены преобразования и рассуждения, позволяющие решить задачу, но решение не доведено до конца – **4 балла.**

- Перебор вариантов сокращен, но нет объяснений, почему, и указан верный ответ – **3 балла**.
- Верно составлено уравнение, но задача не решена – **2 балла**.
- В решении есть рассуждения, позволяющие исключить из рассмотрения какие-либо числа или рассматривать числа с определенными свойствами (например, оканчивающиеся цифрой 5), но далее существенного продвижения в решении нет – **1 балл**.
- Приведен только верный ответ или ответ с проверкой – **1 балл**.

5. В окружности провели диаметр  $AB$  и параллельную ему хорду  $CD$  так, что расстояние между ними равно половине радиуса этой окружности (см. рисунок). Найдите угол  $CAB$ .

Ответ.  $75^\circ$ .

Решение. Рассмотрим треугольник  $AOC$ , где  $O$  – центр окружности. Этот треугольник равнобедренный, так как  $OC$  и  $OA$  – радиусы. Значит, по свойству равнобедренного треугольника, углы  $A$  и  $C$  равны. Проведем перпендикуляр  $CM$  к стороне  $AO$  и рассмотрим прямоугольный треугольник  $OMC$ . По условию задачи, катет  $CM$  – половина гипотенузы  $OC$ . Значит, величина угла  $COM$  равна  $30^\circ$ . Тогда, по теореме о сумме углов треугольника получаем, что угол  $CAO$  (или  $CAB$ ) равен  $75^\circ$ .



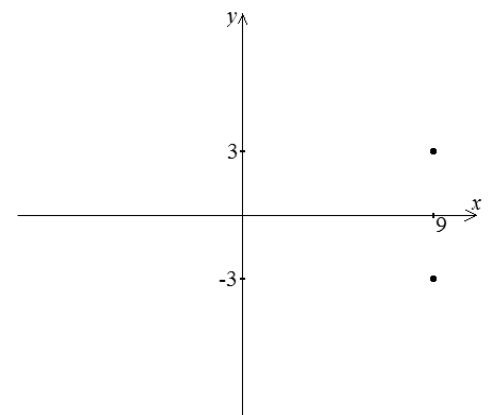
Критерии проверки.

- Верное обоснованное решение задачи – **7 баллов**.
- Приведены верные рассуждения, являющиеся решением задачи, но по каким-либо причинам дан неверный ответ (например, указан угол  $COA$  вместо угла  $CAO$ ) – **6 баллов**.
- Приведены в целом верные рассуждения, в которых допущены ошибки, не имеющие для сути решения принципиального характера, и дан верный ответ – **5 баллов**.
- Приведено верное решение задачи при отсутствии обоснований: указаны все промежуточные выводы без указания связей между ними (ссылок на теоремы или определения) – **4 балла**.
- Сделаны дополнительные построения и обозначения на чертеже, из которых ясен ход решения, дан верный ответ, но не приведены сами рассуждения – **3 балла**.
- Приведен верный ответ при неверных рассуждениях – **0 баллов**.
- Приведен только верный ответ – **0 баллов**.

6. Постройте график уравнения  $x^2 - y^4 = \sqrt{18x - x^2} - 81$ , то есть изобразите на координатной плоскости все точки, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют этому уравнению.

Ответ. См. рисунок.

Решение. Преобразуем данное уравнение, выделив под знаком корня полный квадрат:  $x^2 - y^4 = \sqrt{-(x - 9)^2} - 81$ . Выражение в правой части имеет смысл лишь при  $x = 9$ . Подставляя это значение в уравнение, получаем:  $9^2 - y^4 = 0$ . Разложим на множители левую часть:  $(3 - y)(3 + y)(9 + y^2) = 0$ . Откуда  $y = 3$  или  $y = -3$ . Значит, координаты только двух точек  $(9; 3)$  или  $(9; -3)$  удовлетворяют данному уравнению. График уравнения изображен на рисунке.



Критерии проверки.

- Проведены верные преобразования и рассуждения и верно построен график – **7 баллов**.

- Проведены верные преобразования, но потеряно значение  $y = -3$ ; в качестве графика указана одна точка – **3 балла**.
- Указаны одна или две подходящие точки, возможно, с проверкой, но без иных объяснений либо после неверных преобразований – **1 балл**.
- Проведены верные преобразования, но объявлено, что выражение под корнем (или в правой части после возведения в квадрат) отрицательно и графиком является пустое множество точек – **1 балл**.
- Проведены рассуждения, приведшие к указанию двух точек, но эти точки как-либо соединены (например, отрезком) – **1 балл**.
- Указаны без объяснений две точки, которые как-либо соединены – **0 баллов**.
- В остальных случаях – **0 баллов**.