**11 класс.**

1. Какое из чисел больше: $77^7$ или $7^{77}$?

*Ответ.* Второе число больше.

Решение. $7^{10} > 7^2 > 11$, поэтому $7^{11}=7\cdot 7^{10} > 7\cdot 11=77$. Отсюда следует, что $7^{77}=(7^{11})^7 > 77^7$.

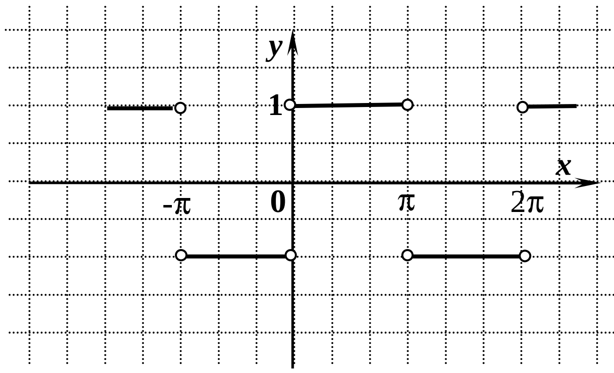
Критерии проверки.

Верный ответ и доказательство **– 7 баллов.**

Верное рассуждение и в конце неверный ответ **– 6 баллов.**

Только ответ **– 1 балл.**

2. Постройте график функции $y=\dfrac{\sin x}{|\sin x|}$.




*Ответ.* См. рисунок.

*Решение*. Используя определение модуля, получаем, что

$$y=\begin{cases}1, \textit{если} \sin x > 0,\\ -1, \textit{если} \sin x < 0.\end{cases}$$

В точках, где $\sin x=0$, функция не определена.

Критерии проверки.

- Верный график с объяснением **– 7 баллов.**
- График без выколотых точек или с частично выколотыми точками **– 4 балла.**
- График функции, принимающей значения 1 и -1, но на неверных промежутках **– 1-2 балла.**

3. Убирая детскую комнату к приходу гостей, мама нашла 9 носков. Среди любых четырёх носков хотя бы два принадлежат одному хозяину. А среди любых пяти носков не больше трёх имеют одного хозяина. Сколько детей разбросало носки, и сколько носков принадлежит каждому ребенку?

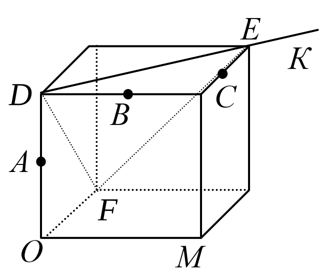
*Ответ.* Детей трое, каждому принадлежит по три носка.

*Решение*. Ни одному из детей не принадлежало более трех носков, так как в противном случае условие «среди любых пяти носков не больше трех имели одного хозяина» было бы не выполнено. Всего носков 9, поэтому детей не менее трех. С другой стороны среди любых четырех носков есть два носка одного ребенка, поэтому детей меньше четырех. Таким образом, в семье трое детей, причем каждый разбросал не более трех носков, а всего носков 9. Значит, каждому ребенку принадлежит 3 носка из найденных мамой.

Критерии проверки.

- Полный ответ с верным объяснением **– 7 баллов.**
- Обосновано, что детей трое **– 5 баллов.**
- Верные соображения, но решение не доведено до конца **– 1-2 балла.**
- Ответ без обоснования **– 0 баллов.**

4. Дан куб. $A$, $B$ и $C$ – середины его ребер (см. рисунок). Чему равен угол $ABC$?




*Ответ.* $120^{\circ}$.

*Решение*. *1 способ.* Проведем диагонали $DE||BC$ и $EF||AB$ и пусть $K$ – точка на продолжении диагонали $DE$ за точку $E$ (см. рис.). Тогда $\angle ABC=\angle FEK$. Но треугольник $DEF$ – равносторонний, поэтому

$\angle DEF=60^{\circ}$, а значит, $\angle FEK=120^{\circ}$.

*2 способ*. Введем систему координат с началом в точке *O*, осями *Ox*, *Oy* и *Oz*, сонаправленными векторам $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OF}$ *и* $\overrightarrow{OD}$ соответственно и пусть ребро куба равно 2. Тогда $A(0;0;1)$, $B(1;0;2)$, $C(2;1;2)$. Поэтому $\overrightarrow{BA}(-1;\ 0;\ -1)$, $|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{2}$, $\overrightarrow{BC}(1;\ 1;\ 0)$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2}$. Теперь найдем двумя способами скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-1)\cdot1+0\cdot1+(-1)\cdot0=-1$ и $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos ABC$. Из этих двух равенств получается, что $\cos ABC=-0{,}5$, т.е. угол *ABC* равен $120^{\circ}$.

*3 способ*. Пусть ребро куба равно 1. Тогда по теореме Пифагора $AB=BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $DC=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ и

$AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Теперь по теореме косинусов из треугольника *ABC* находим, что

$\cos ABC=-0{,}5$.

Критерии проверки.

- Получен верный ответ со всеми обоснованиями – **7 баллов.**
- Ход решения правильный, но ответ неверен из-за арифметической ошибки – **5 баллов.**
- Получен ответ $60^{\circ}$ – **4 балла.**
- Только ответ (в том числе – верный) – **0 баллов.**

5. Числа $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{a+c}$, $\dfrac{1}{b+c}$ образуют арифметическую прогрессию.

Верно ли, что числа $a^2$, $b^2$, $c^2$ также образуют арифметическую прогрессию?

*Ответ.* Да.

*Решение*. Так как указанные три числа образуют арифметическую прогрессию, то верно равенство:

$\dfrac{1}{a+c}-\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{1}{a+c}$. Тогда, приводя к общему знаменателю, получаем: $\dfrac{b-c}{(a+c)(a+b)}=\dfrac{a-b}{(a+c)(b+c)}$. Отсюда: $(b+c)(b-c)=(a-b)(a+b)$ или $b^2-c^2=a^2-b^2$, что в соответствии с определением и означает, что числа $a^2$, $b^2$ и $c^2$ образуют арифметическую прогрессию.

Можно также использовать характеристическое свойство арифметической прогрессии: числа $x$, $y$, $z$ образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $x+z=2y$.

Критерии проверки.

- Полное доказательство – **7 баллов.**
- Только ответ – **0 баллов.**

6. Сколько существует натуральных чисел $n$, для которых $4^n-15$ является квадратом целого числа?

*Ответ.* Два.

*Решение*. Пусть $4^n-15=x^2$, причем x – целое число. Очевидно, что $x\neq0$. Если $x$ – отрицательно, то $(-x)^2$ также равно $4^n-15$; поэтому дальше будем считать, что $4^n-15=x^2$, причем $x$ – натуральное. Из равенства $2^{2n}-15=x^2$ получаем: $2^{2n}-x^2=15$, а используя формулу для разложения разности квадратов на множители: $(2^n-x)(2^n+x)=15$. Т.к. $x$ – натуральное число, то второй множитель слева в последнем равенстве положителен, но тогда положительным должен быть и первый множитель. Число 15 можно разложить на натуральные множители двумя способами: $15=3\cdot5=1\cdot15$. При этом, т.к. $x > 0$, то $2^n+x > 2^n-x$. Таким образом, возможны только два случая:

$$\begin{cases}2^n - x = 1,\\ 2^n + x = 15\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2^n - x = 3,\\ 2^n + x = 5.\end{cases}$$

Решая первую систему уравнений (удобнее всего просто сложить уравнения), получаем, что $2\cdot2^n=16$, т.е. $n=3$. Аналогично из второй системы получается, что $n=2$.

Можно не ограничиваться при решении натуральными значениями $x$, но тогда число систем, подлежащих рассмотрению, возрастает, т.к. возможны еще варианты $15=(-1)\cdot(-15)=(-3)\cdot(-5)$.

Критерии проверки.

- Получен верный ответ с полным обоснованием – **7 баллов.**
- Не рассмотрены случаи разложения 15 на отрицательные множители без обоснования, почему можно не рассматривать отрицательные – **6 баллов.**
- Верно составлены системы для определения $n$, но не проверено, что они имеют натуральные решения – **5 баллов.**
- Из двух возможностей разложения числа 15 на множители рассмотрен только один – **5 баллов.**
- Разумные соображения, не приведшие к решению **1-2 балла**.