10 класс

1. Число *a* на 1 больше числа *b*. Могут ли числа a^2 и b^2 быть равными?

Ответ. Могут.

Решение. Если $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, то $a = b+1$ и $a^2 = b^2$.

Также можно решить систему уравнений: $\begin{cases} a^2 = b^2, \\ a = b+1. \end{cases}$

Критерии проверки.

- Верный ответ с указанием чисел *a* и *b* – **7 баллов.**
- Составлена система уравнений, но при ее решении допущена арифметическая ошибка – **3 балла.**
- Только ответ – **1 балл.**

2. Петя сбегает с четвёртого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем мама едет на лифте. Мама едет на лифте с четвёртого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем Петя сбегает с пятого этажа на первый. За сколько секунд Петя сбегает с четвёртого этажа на первый? (Длины пролетов лестницы между всеми этажами одинаковы).

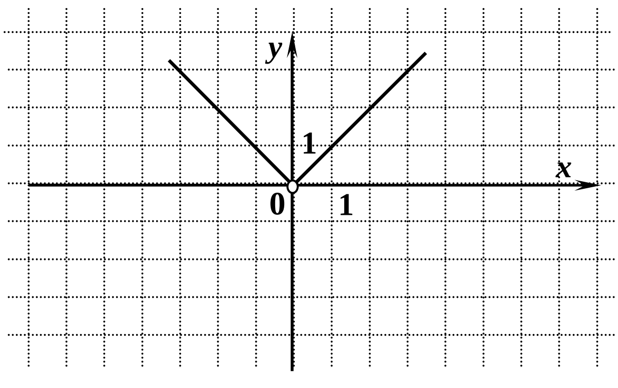
Ответ. За 12 секунд.

Решение. Между первым и четвертым этажами 3 пролета, а между пятым и первым – 4. Согласно условию, Петя 4 пролета пробегает на 2 секунды дольше, чем мама едет на лифте, а три пролета – на 2 секунды быстрее мамы. Значит, за 4 секунды Петя пробегает один пролет. Тогда с четвертого этажа на первый (т.е. на 3 пролета) Петя сбегает за $4 \cdot 3 = 12$ секунд.

Критерии проверки.

- Верный ответ с полным решением **– 7 баллов.**
- Объяснено, что на один пролет требуется 4 секунды, в ответе указано 4 секунды – **5 баллов.**
- Верное обоснование в предположении, что путь с пятого этажа на первый в 1,25 раз больше пути с четвертого этажа на первый и ответ 16 секунд – **3 балла.**
- Только ответ – **0 баллов.**

3. Постройте график функции $y = \frac{x^2}{|x|}$.



Ответ. См. рисунок.

Решение. Т.к. $x^2=|x|^2$, то $y=|x|$, причем $x \neq 0$. Можно также, используя определение модуля, получить, что

$y = \begin{cases} x, \ \textit{если } x > 0, \\ -x, \textit{если } x < 0 \end{cases}$ (при $x=0$ функция не определена).

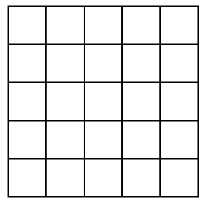
Критерии проверки.

- Верный график с объяснением **– 7 баллов.**
- Верный график без каких-либо пояснений – **5 баллов.**
- График функции $y=|x|$ без выколотой точки **– 3 балла.**

4. В квадрате со стороной 5 произвольным образом отметили 201 точку. Верно ли, что какие-то 5 точек можно накрыть квадратом со стороной 1?

Ответ. Да.

Решение. Разделим данный квадрат со стороной 5 прямыми, параллельными его сторонам, на 25 квадратов со стороной 1 (см. рис.). Если бы в каждом таком квадрате было не больше 4 отмеченных точек, то всего было бы отмечено не более $25 \cdot 4 = 100$ точек, что противоречит условию. Следовательно, хотя бы в одном из полученных квадратов должно быть 5 из отмеченных точек.



Критерии проверки.

- Верное решение **– 7 баллов.**
- Только ответ **– 0 баллов.**

5. На числовой прямой закрашивают красным и синим цветом точки с целыми координатами по следующим правилам: а) точки, разность координат которых равна 7, должны быть покрашены одним цветом; б) точки с координатами 20 и 14 должны быть покрашены красным, а точки с координатами 71 и 143 — синим. Сколькими способами можно раскрасить все точки с целыми координатами, соблюдая эти правила?

Ответ. Восемью способами.

Решение. Из пункта а) следует, что раскраска всех точек с целыми координатами однозначно определяется раскраской точек, соответствующих числам 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Точка $0=14-2\cdot 7$ должна быть покрашена так же как 14, т.е. красным. Аналогично, точка $1=71-10\cdot 7$ должна быть покрашена синим, точка $3=143-20\cdot 7$ – синим, и $6=20-2\cdot 7$ – красным. Поэтому остается только посчитать, сколькими различными способами можно раскрасить точки, соответствующие числам 2, 4 и 5. Так как каждую точку можно раскрасить двумя способами – красным или синим – то всего способов $2\cdot 2\cdot 2=8$.

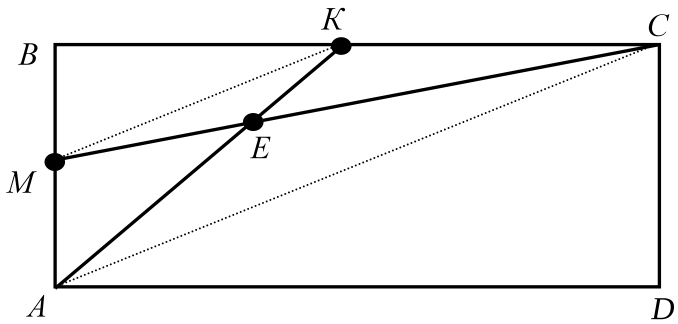
Примечание. При подсчете числа способов раскрашивания точек 2, 4 и 5, можно просто перечислить все способы, например, в виде таблицы:

2	*4*	*5*
кр	*кр*	*кр*
кр	*кр*	*син*
кр	*син*	*кр*
кр	*син*	*син*
син	*кр*	*кр*
син	*кр*	*син*
син	*син*	*кр*
син	*син*	*син*

Критерии проверки.

- Верный ответ с правильным обоснованием **– 7 баллов.**
- Задача сведена к подсчету числа способов раскрасить 3 точки, но получен ответ 6 или 7 – 4 **балла.**
- Задача сведена к подсчету числа способов раскрасить 3 точки, но подсчет числа способов отсутствует или получен ответ, отличный от указанных ранее **– 3 балла.**
- Ответ (в том числе правильный) без обоснования **– 0 баллов.**

6. Дан прямоугольник *ABCD*. Точка *M* – середина стороны *AB*, точка *K* – середина стороны *BC*. Отрезки *AK* и *CM* пересекаются в точке *E*. Во сколько раз площадь четырехугольника *MBKE* меньше площади четырехугольника *AECD*?



Ответ. В 4 раза.

Решение. Проведем отрезки *MK* и *AC*. Четырехугольник *MBKE* состоит из треугольников *MBK* и *MKE*, а четырехугольник *AECD* – из треугольников *AEC* и *ACD*. Далее можно рассуждать разными способами.

1 способ. Треугольники *MBK* и *ACD* – прямоугольные и катеты первого в 2 раза меньше катетов второго, поэтому они подобны и площадь треугольника *ACD* в 4 раза больше площади треугольника *MBK*.

Т.к. *M* и *K* – середины *AB* и *BC* соответственно, то *MK* – средняя линия треугольника *ABC*, поэтому $MK||AC$ и $MK=0{,}5AC$. Из параллельности прямых *MK* и *AC* следует подобие треугольников *MKE* и *AEC*, а т.к. коэффициент подобия равен 0,5, то площадь треугольника *AEC* в 4 раза больше площади треугольника *MKE*.

Теперь: $S_{AECD} = S_{AEC}+S_{ACD}=4S_{MKE}+4S_{MBK}=4(S_{MKE}+S_{MBK})=4S_{MBKE}$.

2 способ. Пусть площадь прямоугольника *ABCD* равна *S*. Тогда площадь треугольника *ACD* равна $\frac{1}{2}S$ (диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника), а площадь треугольника *MBK* равна $\frac{1}{2}MB\cdot BK=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot\frac{1}{2}BC=\frac{1}{8}AB\cdot BC=\frac{1}{8}S$.

Т.к. *M и K* –середины отрезков *AB* и *BC*, то *AK* и *CM* – медианы треугольника *ABC*, поэтому *E* – точка пересечения медиан треугольника *ABC*, т.е. расстояние от *E* до *AC* равно $\frac{1}{3}h$, где *h* – высота треугольника *ABC*, проведенная из вершины *B*. Тогда площадь треугольника *AEC* равна $\frac{1}{2}AC\cdot(\frac{1}{3}h)=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}AC\cdot h)=\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}S)=\frac{1}{6}S$. Тогда для площади четырехугольника *AECD*, равной сумме площадей треугольников *AEC* и *ACD*, получаем: $\frac{1}{2}S+\frac{1}{6}S=\frac{2}{3}S$.

Далее, т.к. *MK* – средняя линия треугольника *ABC*, то площадь треугольника *MKE* равна $\frac{1}{2}MK\cdot(\frac{1}{2}h-\frac{1}{3}h)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}AC)\cdot(\frac{1}{6}h)=\frac{1}{12}(\frac{1}{2}AC\cdot h)=\frac{1}{12}S_{ACD}=\frac{1}{24}S$. Поэтому для площади четырехугольника *MBKE*, равной сумме площадей треугольников *MBK* и *MKE*, получаем: $\frac{1}{8}S+\frac{1}{24}S=\frac{1}{6}S$.

Таким образом, отношение площадей четырехугольников *AECD* и *MBKE* равно $\frac{2}{3}S:(\frac{1}{6}S)=4$.

Критерии проверки.

- Верное решение и верный ответ – **7 баллов.**
- Верное решение, но ответ неверен из-за арифметической ошибки – **5 баллов.**