11 класс

Задача 1. Ускорение доски

На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска длиной L и массой M. На краю доски покоится небольшой брусок. На брусок начинает действовать постоянная горизонтальная сила, так что он движется вдоль доски с ускорением, которое больше ускорения доски. Найдите ускорение, с которым двигалась доска, если за время движения по ней бруска выделилось количество теплоты Q.

Задача 2. Маятник

Маленький шарик колеблется на лёгкой нерастяжимой нити в поле тяжести g с большой угловой амплитудой α. Найдите величину ускорения, с которым движется шарик в те моменты времени, когда величина силы натяжения в 4 раза больше ее минимальной величины. При каких значениях α возможна такая ситуация?

Задача 3. Перезарядка конденсаторов

Три одинаковых конденсатора ёмкостью C, резистор сопротивлением R и диод включены в схему, представленную на рис. 8. Вольтамперная характеристика диода представлена на рис. 9. Первоначально левый (на рисунке) конденсатор заряжен до напряжения U_0, при этом заряд верхней пластины — положительный. Два других конденсатора не заряжены, ключ разомкнут. Затем ключ замыкают.

Определите:

1. напряжение на конденсаторах через большой промежуток времени после замыкания ключа;
2. тепло, которое выделится в схеме к этому моменту времени;
3. тепло, выделившееся к этому моменту на диоде;
4. тепло, выделившееся к этому моменту на резисторе.

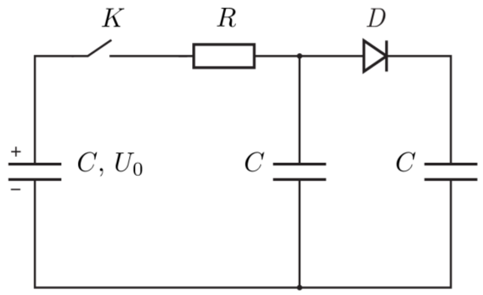

рис. 8

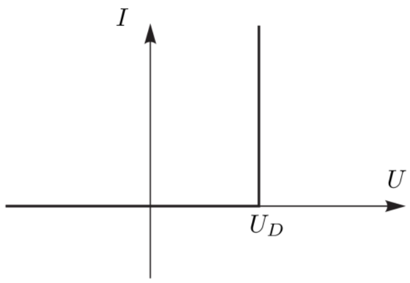

рис. 9

Задача 4. Циклический процесс

На рис. 10 представлен график циклического процесса. Рабочее тело - многоатомный идеальный газ. Найдите КПД этого процесса.

Примечание: процесс с постоянной теплоёмкостью C называется политропическим и для идеального газа задаётся уравнением

$$pV^{\frac{C_p - C}{C_V - C}} = \text{const},$$

где C_p — теплоёмкость газа при постоянном давлении, а C_V — теплоёмкость газа при постоянном объёме.

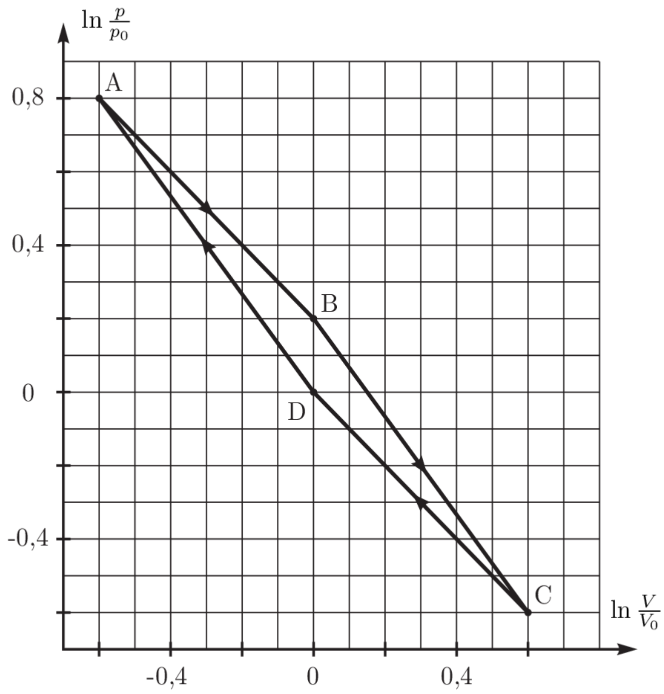

рис. 10

Задача 5. Провисла-натянулась

На гладкой горизонтальной плоскости находятся три бруска, массы которых равны m_1, m_2 и m_3. На рис. 11 приведён вид сверху. Упругая лёгкая резинка связывает бруски 1 и 2 и проходит через блок, прикреплённый к бруску 3. Трения в системе нет. Исходно бруски неподвижны, а резинка чуть провисает. Бруску 3 ударом (мгновенно) сообщают скорость V.

1. Найдите скорости брусков в момент, когда растяжение резинки наибольшее.
2. Какими будут скорости брусков, когда резинка снова провиснет?
3. В случае, когда $V = 1$ м/с, $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг найдите скорость v_3 третьего бруска, когда растяжение резинки наибольшее.

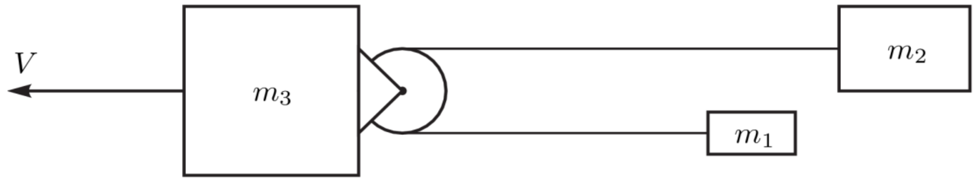

рис. 11

11 класс

Задача 1. Ускорение доски

Пусть m — масса бруска, a — искомое ускорение доски, ka — ускорение бруска ($k > 1$), F — величина постоянной силы, действующая на брусок, $F_{\text{тр}}$ — величина силы трения. Запишем вторые законы Ньютона для бруска и доски в проекции на горизонтальную ось:

$$F - F_{\text{тр}} = mka,$$
$$F_{\text{тр}} = Ma.$$

Если за t обозначить время движения бруска от одного края доски до другого, то в лабораторной системе отсчёта путь, пройденный бруском, равен $L_m = kat^2/2$, а путь, пройденный доской, равен $L_M = at^2/2$. Разность этих путей есть длина доски:

$$L = L_m - L_M.$$

Работа силы, приложенной к бруску, равна

$$A = F \cdot L_m = (mka + Ma) \cdot L_m. \qquad (3)$$

Запишем закон сохранения энергии для системы «брусок+доска»:

$$A = \frac{m}{2}(kat)^2 + \frac{M}{2}(at)^2 + Q = mkaL_m + MaL_M + Q.$$

С учётом выражения для работы (3) после сокращения получим:

$$Q = Ma(L_m - L_M) = MaL, \quad \text{откуда} \quad a = \frac{Q}{ML}.$$

Альтернативное решение

Количество выделвшейся при трении теплоты равно произведению силы трения на относительное перемещение трущихся тел:

$$Q = F_{Тр}L, \ \text{откуда} \ F_{Тр} = \frac{Q}{L}.$$

Ускорение доски $a = \dfrac{F_{Тр}}{M}$. Следовательно, $a = \dfrac{Q}{LM}$.

Примерные критерии оценивания решения (1)

Использован второй закон Ньютона для доски .... 1 балл
Использован второй закон Ньютона для бруска .... 1 балл
Записано выражение для пути, пройденного бруском .... 1 балл
Записано выражение для пути, пройденного доской .... 1 балл
Записано выражение для разности путей .... 1 балл
Записан закон сохранения энергии .... 1 балл
Получен ответ .... 4 балла

Примерные критерии оценивания альтернативного решения

Формул для количества теплоты $Q = F_{тр}L$ .... 4 баллова
Найдена сила трения .... 2 балла
Найдено ускорение доски .... 4 балла

Задача 2. Маятник

Обозначим массу шарика *m*, а длину нити *l*. Обратим внимание на то, что шарик в любой момент движется по окружности радиуса *l*, то есть амплитуда колебаний не должна превышать $90°$. Рассмотрим момент, когда нить составляет угол φ с вертикалью. Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на ось, параллельную нити:

$$m\frac{v^2}{l} = T - mg\cos\varphi. \tag{4}$$

Из закона сохранения энергии найдём квадрат скорости шарика:

$$m\frac{v^2}{2} = mgl(\cos\varphi - \cos\alpha), \quad \text{откуда} \quad mv^2 = 2gl(\cos\varphi - \cos\alpha). \tag{5}$$

Подставив (5) в (4), получим

$$T = mg(3\cos\varphi - 2\cos\alpha).$$

Видно, что сила натяжения нити минимальна при $\varphi = \alpha$ и равна $T_{\min} = mg\cos\alpha$. При φ таком, что $\cos\varphi = 2\cos\alpha$, $T = 4T_{\min} = 2mg\cos\varphi$. В этот момент нормальное ускорение шарика равно

$$a_n = \frac{T - mg\cos\varphi}{m} = g\cos\varphi,$$

а тангенциальное ускорение шарика равно

$$a_\tau = g\sin\varphi.$$

Полное ускорение шарика $a = g\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = g$.

Сила натяжения нити может в 4 раза превышает минимальную, если существует такой угол φ, что $\cos\varphi = 2\cos\alpha$, то есть

$$2\cos\alpha \le 1, \quad \text{откуда} \quad \alpha \ge 60°.$$

Значит, описанная в задаче ситуация возможна при $60° \le \alpha < 90°$.

Примерные критерии оценивания

Найдена скорость шарика при заданном отклонении от вертикали .... 2 балла
Для шарика записан второй закон Ньютона в проекции на ось, параллельную нити ... 1 балл
Правильно указан момент, когда натяжение нити минимально .... 1 балл
Найдено искомое ускорение .... 3 балла
Указано, что $\alpha < 90°$ .... 1 балл
Найдена минимальная амплитуда колебаний, при которой возможна описанная в задаче ситуация ($60°$) .... 2 балла

Задача 3. Перезарядка конденсаторов

Нужно рассмотреть два случая: малых напряжений U_0, когда правый конденсатор вообще не будет заряжаться, так как напряжение на среднем конденсаторе не превзойдёт напряжение открытия диода U_D, и случая, когда заряжается и правый конденсатор. Если диод не открывается, то первоначальный заряд левого конденсатора делится поровну между двумя конденсаторами. Напряжения на конденсаторах через большой промежуток времени после замыкания ключа:

$$U_1 = \frac{U_0}{2}, \quad U_2 = \frac{U_0}{2}, \quad U_3 = 0 \quad \text{(конденсаторы пронумерованны слева направо).}$$

Видно, что этот случай реализуется при $U_D \geq U_0 / 2$. Выделившееся в цепи количество теплоты Q найдём из закона сохранения энергии:

$$Q = \frac{CU_0^2}{2} - 2\frac{C(U_0/2)^2}{2} = \frac{CU_0^2}{4}.$$

Поскольку ток через диод не тёк, всё тепло выделилось на резисторе.

Теперь рассмотрим случай $U_D < U_0 / 2$. При зарядке правого конденсатора напряжение на нём U_3 будет меньше, чем напряжение на среднем U_2 на величину U_D. Напряжения на левом и среднем конденсаторах U_1 и U_2 к окончанию перезарядки будут равными: $U_1 = U_2 = U$. Условие сохранение заряда:

$$CU_0 = 2CU + C(U - U_D), \quad \text{откуда} \quad U = \frac{U_0 + U_D}{3}.$$

Общее количество теплоты, выделившееся к концу процесса в схеме будет равно разности начальной и конечной энергий конденсаторов:

$$Q = \frac{CU_0^2}{2} - 2\frac{CU^2}{2} - \frac{C(U - U_D)^2}{2} = \frac{C(U_0^2 - U_D^2)}{3}.$$

Напряжение на третьем конденсаторе: $U_3 = U - U_D = \dfrac{(U_0 - 2U_D)}{3}$.

Тепло, выделившееся на диоде

$$Q_D = q_D \cdot U_D,$$

где $q_D = CU_3$ — заряд правого конденсатора к концу процесса перезарядки. Таким образом

$$Q_D = \frac{C\ U_0 U_D - 2U_D^2}{3}.$$

Остальное тепло выделится на резисторе:

$$Q_R = Q - Q_D = \frac{C(U_0^2 - U_0 U_D + U_D^2)}{3}.$$

Примерные критерии оценивания

Рассмотрен и проанализирован случай $U_D \geq U_0/2$ .... 3 балла

Для случая $U_D < U_0/2$:

Указано, что $U_3 = U_2 - U_D$ .... 1 балл

Указано, что $U_1 = U_2$ .... 1 балл

Найдены напряжения U_1, U_2, U_3 .... 1 балл

Записан закон сохранения энергии .... 1 балл

Найдено всё выделившееся тепло Q .... 1 балл

Найдено тепло, выделившееся на диоде Q_D .... 1 балл

Найдено тепло, выделившееся на резисторе Q_R .... 1 балл

Задача 4. Циклический процесс

График процесса состоит из четырёх прямых, каждую из которых можно задать уравнением вида

$$y + nx = c, \tag{6}$$

где $y = \ln(p/p_0)$, $x = \ln(V/V_0)$, а c — некоторая константа. Для участков AB и CD $n = 1$, а для участков BC и AD $n = 4/3$. Произведя потенцирование выражения (6), получим

$$pV^n = c_1, \quad \text{где} \quad c_1 = p_0 V_0^n e^{c_1}.$$

Участки AB и CD описываются уравнением $pV = \text{const}$, то есть являются изотермами, а участки BC и AD описываются уравнением $pV^{4/3} = \text{const}$, то есть являются адиабатами (газ многоатомный). Значит, исследуемый процесс есть цикл Карно, его КПД

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура на верхней изотерме, а T_2 — на нижней. Из уравнения состояния идеального газа следует, что

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_D V_D}{p_B V_B} = \frac{p_D}{p_B} = e^{-0,2} = 0,82.$$

Откуда

$$\eta = 18\%.$$

Примерные критерии оценивания

Показано, что участки AB и CD — изотермы .... 2 балла

Показано, что участки BC и AD — адиабаты .... 2 балла

Выражение для КПД цикла Карно .... 2 балла

Получен ответ .... 4 балла

Задача 5. Провисла-натянулась

1. Пусть T — сила натяжения резинки, тогда сила, действующая со стороны блока на брусок 3 равна $2T$. Ускорения брусков обозначим a_1, a_2 и a_3 соответственно. По второму закону Ньютона

$$m_1a_1 = T;\ m_2a_2 = T;\ m_3a_3 = \ 2T.$$

Тогда тоже отношение справедливо для изменения импульсов (с учётом направлений)

$$m_1v_1 = m_2v_2 = \quad V - v_3 \ \frac{m_3}{2}.$$

Скорость изменения длины резинки $dL/dt = \ 2v_3 - \ (v_1 + v_2)$ при наибольшем растяжении обращается в ноль, то есть $v_1 + v_2 = \ 2v_3$.

Откуда

$$v_3 = V\frac{m_3 \ \ m_1 + m_2}{4m_1m_2 + m_1m_3 + m_3m_2};$$

$$v_1 = \ V\frac{2m_3m_2}{4m_1m_2 + m_1m_3 + m_3m_2};$$

$$v_2 = \ V\frac{2m_3m_1}{(4m_1m_2 + m_1m_3 + m_3m_2)}.$$

2. Остаётся в силе следствие второго закона Ньютона

$$m_1v_1 = m_2v_2 = \ \frac{m_3(V - v_3)}{2}.$$

При возвращении резинки снова в ненатянутое состояние, по закону сохранения энергии:

$$m_1\frac{v_1^2}{2} + m_2\frac{v_2^2}{2} + m_3\frac{v_3^2}{2} = m_3\frac{V^2}{2}.$$

Откуда

$$v_3 = \ V\frac{m_1m_3 + \ m_3m_2 - 4m_1m_2}{4m_1m_2 + \ m_1m_3 + \ m_3m_2};$$

$$v_1 = \ V\frac{4m_3m_2}{4m_1m_2 + \ m_1m_3 + \ m_3m_2};$$

$$v_2 = \ V\frac{4m_3m_1}{(4m_1m_2 + \ m_1m_3 + \ m_3m_2)}.$$

3. Подставляю в полученную в первом пункте формулу числовые значения, находим

$$v_3 = \frac{9}{17}\ \text{м/с}.$$

Примерные критерии оценивания

Записаны вторые законы Ньютона для брусков .... 1 балл
Из связи между ускорениями получена связь между скоростями .... 1 балл
Пункт 1:
Найдены искомые скорости .... 3 балла
Пункт 2:
Записан закон сохранения энергии .... 1 балл
Найдены искомые скорости .... 3 балла
Пункт 3:
Получен ответ .... 1 балл