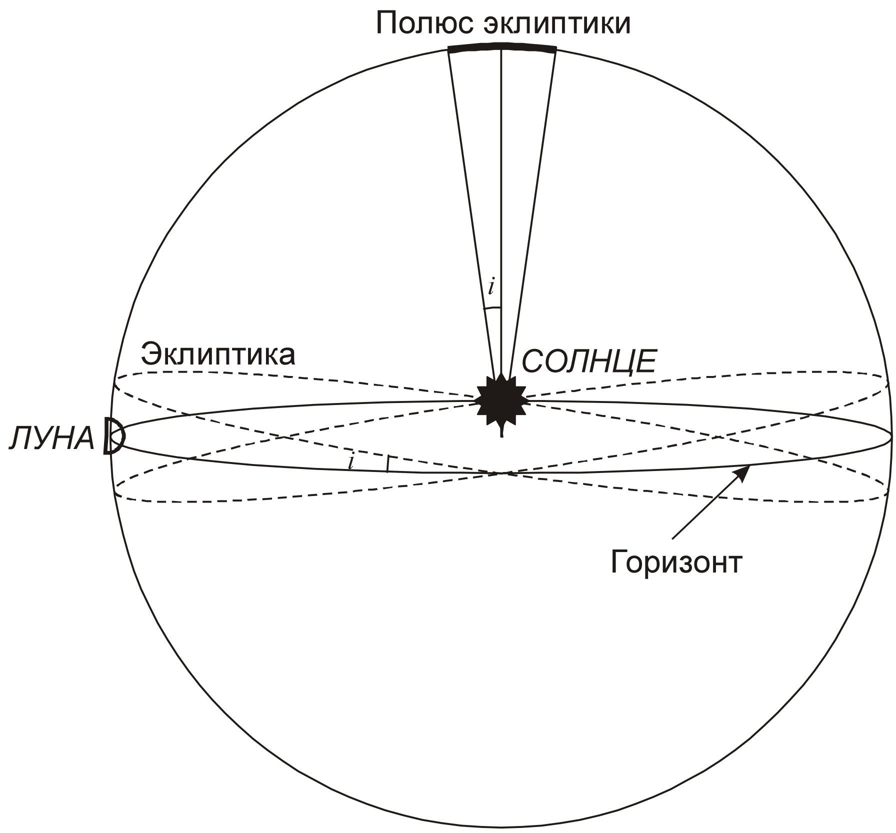
<u>11 класс</u>

1. Условие. Солнце и Луна в фазе первой четверти одновременно заходят за горизонт. На какой широте находится наблюдатель? Рефракцией и параллаксом Луны пренебречь.

1. Решение. Изобразим конфигурацию Солнца и Луны в момент наблюдения:



Солнце всегда находится на эклиптике. Луна в первой четверти располагается в 90° восточней Солнца. При этом Луна может отстоять от эклиптики на угол, не превышающей наклона лунной эклиптике i (5.15°). Получается, что в момент наблюдения эклиптика располагается между двумя пунктирными линиями на рисунке. Следовательно, один из полюсов эклиптики (северный либо южный) находится рядом с зенитом, отстоя на него на угол не более i. При этом направление от зенита к полюсу эклиптики может быть любым, так как в условии задачи не сказано, в каких точках горизонта находится Солнце. Если оно заходит точно на западе, то полюс эклиптики удален от зенита к северу или югу. Склонение полюса эклиптики равно

$$\delta = \pm (90° - \varepsilon) = \pm 66.55°.$$

Здесь ε – угол наклона экватора к эклиптике. Широта места может быть равна

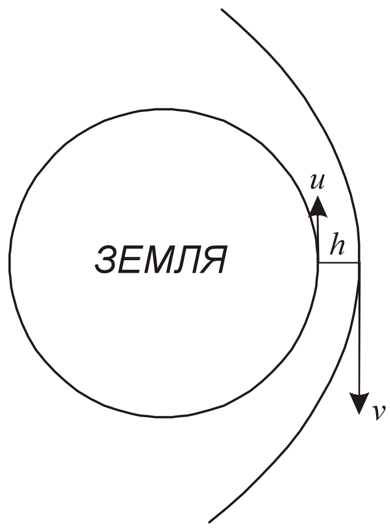
$$\delta - i \leq \varphi \leq \delta + i.$$

В итоге, мы получаем интервалы для широты: [–71.7°; –61.4°]; [+61.4°; +71.7°].

1. Рекомендации для жюри. Основой решения задачи является понимание взаимного расположения Солнца, Луны и эклиптики относительно горизонта в указанный момент. Среди решений участников олимпиады может встретиться вывод, что эклиптика в точности совпадает с горизонтом, и дело происходит на полярном круге. Такое решение оценивается не выше 2 баллов, если в качестве ответа указана только одна широта, и не выше 4 баллов – если указано два решения (в северном и южном полушарии). В случае правильного учета наклона лунной орбиты к эклиптике оценка достигает 6 баллов при ответе в одном полушарии и 8 баллов – при ответе в обоих полушариях.

2. Условие. С какой максимальной угловой скоростью среди звезд может перемещаться искусственный спутник на околоземной орбите без двигателей при наблюдении с поверхности нашей планеты?

2. Решение. Так как в условии задачи говорится об искусственном спутнике на орбите вокруг Земли, он не может двигаться относительно Земли быстрее второй космической скорости v_2 (точнее говоря, он не может двигаться и с этой скоростью, она рассматривается как верхней предел). Угловая скорость движения спутника относительно звезд будет тем больше, чем больше его скорость относительно наблюдателя и чем меньше расстояние до него. Также относительная скорость должна быть направлена перпендикулярно направлению на спутник. Рассмотрим предельную ситуацию, при которой орбита спутника лежит в плоскости экватора Земли, а направление вращения спутника противоположно направлению осевого вращения Земли:



Для спутника, пролетающего в зените над наблюдателем на экваторе, угловая скорость составит

$$\omega = \frac{u+v}{h} = \frac{(2\pi R/T)+v}{h}.$$

Здесь R – радиус Земли, T – продолжительность звездных суток. Для скорости v справедливо неравенство

$$v < v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}.$$

Здесь M – масса Земли, а h – минимальная высота полета спутника, которую можно принять равной 200 км. В итоге, максимальная угловая скорость равна примерно 0.06 рад/с или 3°/с.

2. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участники олимпиады должны найти конфигурацию наблюдателя и спутника, при котором может быть достигнута его максимальная угловая скорость – встречное движение в плоскости экватора. Эта часть решения оценивается в 3 балла. Если при этом не учтено движение наблюдателя вместе с Землей (либо не обоснована малость этого фактора), из этих 3 баллов выставляется 2 балла, но дальнейшее решение оценивается в полной мере. Далее участникам олимпиады необходимо определить максимальную скорость спутника, что оценивается в 2 балла. Для решения достаточно считать ее равной второй космической скорости с необязательным учетом ее зависимости от высоты. Участники могут вычислять ее более сложным способом, оценивая максимальное расстояние в апогее. Этот подход также считается правильным и оценивается в те же 2 балла. Разумный выбор минимальной высоты полета оценивается в 1 балл, при этом значения от 150 до 300 км могут считаться правильными. Наконец, расчет угловой скорости оценивается в 2 балла.

3. Условие. На снимках космической обсерватории SOHO различимы звезды до 8^m на 20 угловых радиусах Солнца от его центра. Каким должен быть размер астероида, чтобы его можно было бы обнаружить рядом с Солнцем, в 20 радиусах от его центра в пространстве? Оптические свойства поверхности астероида считать аналогичными лунным, материал – тугоплавким, изменениями свойств из-за нагрева пренебречь.

3. Решение. Чтобы увидеть астероид, расположенный в 20 радиусах Солнца от его центра, на 20 угловых радиусах Солнца от его положения на небе, астероид должен располагаться «сбоку» от Солнца. Условия его освещения будут аналогичны условию освещения Луны в фазе первой или последней четверти, поэтому нам нужно сравнивать яркость астероида с Луной именно в этой фазе. Тогда ее блеск m_0 составляет -10^m. Освещенность, создаваемая Луной на Земле в это время, равна

$$J_0 = \frac{B \cdot A \cdot F \cdot R_0^2}{16\pi \cdot L_0^2 D_0^2}.$$

Здесь B – светимость Солнца, A – сферическое альбедо Луны, F – фактор, характеризующий отражательную способность лунной поверхности для конфигурации первой и последней четверти (может показаться, что этот фактор равен 0.5, но в действительности он существенно меньше, как видно из звездных величин Луны в первой и последней четверти и в полнолунии). R_0 – радиус Луны, L_0 – расстояние от Солнца до Луны (и Земли), D_0 – расстояние от Луны до Земли.

По условию задачи, свойства поверхности астероида аналогичны лунным, следовательно, при таких же условиях освещения («сбоку») у него будут те же значения A и F. Расстояние от астероида до Земли в этом случае такое же, как от Солнца до Земли – L_0. Освещенность, создаваемая астероидом на Земле, составит

$$J = \frac{B \cdot A \cdot F \cdot R^2}{16\pi \cdot D^2 L_0^2}.$$

Здесь R – радиус астероида, D – его расстояние от Солнца. Чтобы обнаружить астероид, эта освещенность должна соответствовать звезде m=8, то есть

$$\frac{J}{J_0} = \frac{R^2 D_0^2}{R_0^2 D^2} \geq K = 10^{0.4(m_0 - m)} = 6.3 \cdot 10^{-8}.$$

Радиус астероида должен быть

$$R \geq \frac{R_0 D \sqrt{K}}{D_0}.$$

Расстояние D есть 20 радиусов Солнца (14 млн км), отсюда минимальный радиус астероида составляет 16 км.

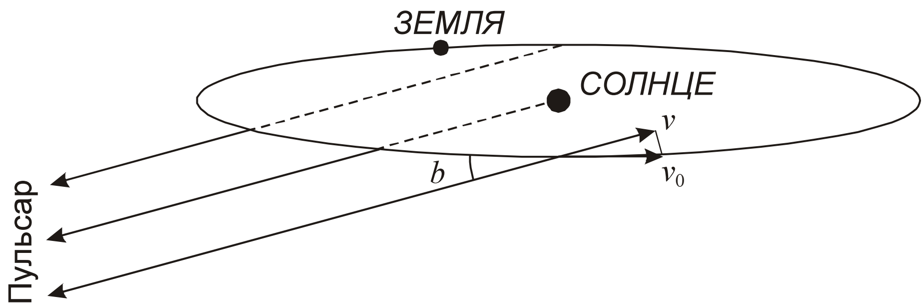
3. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участник олимпиады должен получить соотношение яркостей, соответствующих объекту 8^m и Луне в фазе первой (последней) четверти. Данный этап оценивается в 2 балла. Если вместо этого участник олимпиады берет данные о Луне в полнолунии (m_0=–12.7), эти 2 балла не выставляются, но последующие этапы решения оцениваются в полной мере. Далее, выражения для освещенности от астероида и Луны на Земле могут быть записаны в общем виде (как сделано выше), возможна и прямая ссылка на сходство отражающих свойств астероида и Луны и переход к соотношению их яркостей друг к другу. Вне зависимости от метода, правильная запись выражения для отношения яркостей оценивается в 4 балла. Окончательное вычисление минимального радиуса астероида оценивается еще в 2 балла.

4. Условие. Пульсар с гелиоцентрическим периодом 0.3 секунды имеет координаты $\alpha = 18^h$, $\delta = -55°$. В каких пределах будет меняться наблюдаемый период этого пульсара в течение года?

4. Решение. На период (или частоту) прихода импульсов от пульсара будет влиять движение Земли – как орбитальное, так и осевое. Пусть v – лучевая скорость Земли (наблюдателя) относительно пульсара. Тогда изменение периода пульсара ΔP по сравнению с его гелиоцентрическим периодом P будет происходить в соответствии с эффектом Доплера:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{v}{c}.$$

Определим, как расположен пульсар относительно плоскости эклиптики. Из его координат видно, что он находится точно под южной точкой эклиптики (точкой зимнего солнцестояния) со склонением –ε (угол наклона экватора к эклиптике с отрицательным знаком). Эклиптическая широта b в этом случае равна $\delta + \varepsilon = -31.5°$.



Максимальная (по модулю) относительная скорость, создаваемая орбитальным движением Земли, равна

$$v = v_0 \cos b = 25.4 \text{ км/с}.$$

Осевая скорость вращения даже на экваторе примерно в 50 раз меньше и не внесет заметного изменения в эту величину. Амплитуда изменений периода составляет ±0.000025 с. Разность между максимальным и минимальным периодами составит 0.00005 с.

4. Рекомендации для жюри. Для правильного решения задачи участники олимпиады должны определить, что изменение периода пульсара происходит за счет эффекта Доплера, что оценивается в 2 балла. Определение положения пульсара относительно плоскости эклиптики оценивается в 3 балла, вычисление лучевой скорости – в 1 балл. Если в качестве лучевой скорости в формулу для эффекта Доплера подставляется полная орбитальная скорость Земли, оценка уменьшается на 3 балла. Окончательное вычисление амплитуды изменения периода либо величин максимального и минимального периода и их разности оценивается в 2 балла. При выполнении данного этапа вероятна ошибка в 2 раза, связанная с тем, что в разные сезоны гола период пульсара может как увеличиваться, так и уменьшаться. В этом случае оценка уменьшается на 1 балл.

5. Условие. Каким должно быть фокусное расстояние наземного телескопа с апертурой 20 см, чтобы количество энергии, приходящее от Марса и Антареса (1.1^m) на один пиксель ПЗС-матрицы, было одинаковым? Считать Марс находящимся в великом противостоянии: его блеск -2.9^m, расстояние до Земли 56 млн км. Размер квадратного пикселя ПЗС-матрицы равен 10 мкм.

5. Решение. Пусть $J_А$ – поток световой энергии, приходящей от Антареса, а $J_М$ – поток энергии приходящей от Марса. Из формулы Погсона можем определить отношение этих потоков как

$$\frac{J_М}{J_А} = K = 10^{0.4(m_А - m_М)} = 40.$$

При этом Марс является протяженным объектом с угловым диаметром $\delta_М$=25″ (это можно определить на основе заданного расстояния до Земли), а Антарес – точечная звезда. Физически рассмотреть его диск нельзя, а его угловые размеры при наблюдении в телескоп будут определяться дифракцией и атмосферным дрожанием. Размер дифракционного диска (кружка Эри) для телескопа с диаметром объектива D равен

$$\delta_{А0} = 206265'' \cdot 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.69''.$$

Атмосферное дрожание увеличивает видимый диск до размера $\delta_А$ порядка 1″. Получается, что видимая площадь Антареса на небе примерно в 600-800 раз меньше видимой площади диска Марса, а его поверхностная яркость в 15-20 раз больше поверхностной яркости диска Марса. Поэтому если угловой размер, соответствующий одному пикселю матрицы, окажется меньше 1″, то изображения Марса и Антареса попадут на несколько пикселей, и освещенность пикселя от Антареса будет в 15-20 раз больше, чем от Марса.

Однако, условие задачи может быть выполнено, если маленькое изображение Антареса уместится в один пиксель, будучи меньше его по размерам, а изображение Марса займет K=40 пикселей. Рассчитаем угловой размер пикселя для этого случая:

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi \delta_М^2}{4K}} = 3.5''.$$

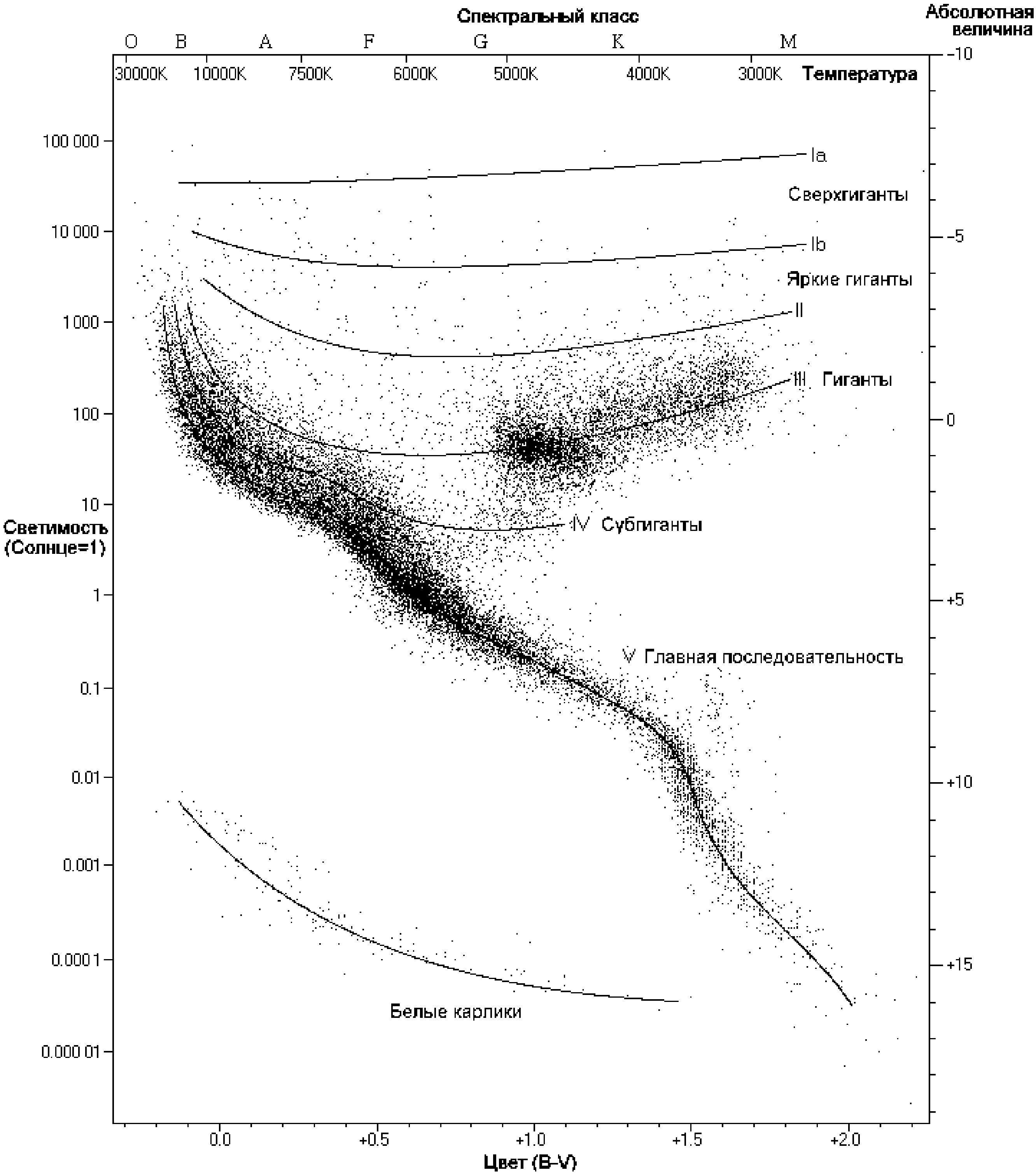
Это больше угловых размеров Антареса, размытых атмосферным дрожанием, удовлетворяя сделанному выше предположению. Зная линейный размер пикселя b, получаем фокусное расстояние объектива:

$$F = \frac{b \cdot 206265''}{\beta''} = 60 \text{ см}.$$

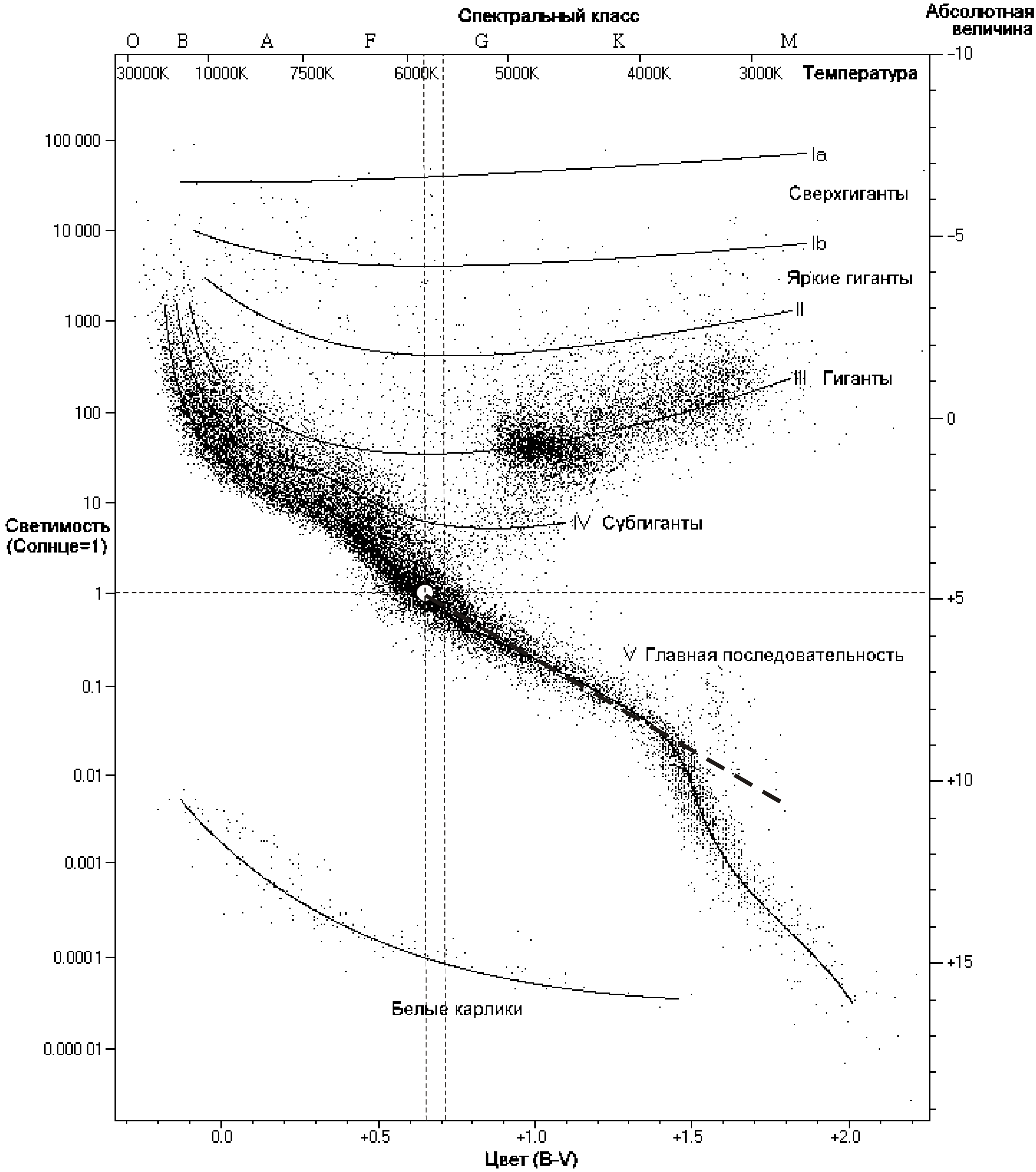
Ко всему сказанному необходимо добавить, что даже при больших размерах пикселей изображение Антареса может попадать на их границу, освещая сразу несколько (от 2 до 4) пикселей. Этот эффект приводит к уменьшению средней освещенности одного пикселя от Антареса в 2-4 раза. Уменьшение освещенности пикселей от Марса в 2-4 раза соответствует увеличению требуемого фокусного расстояния в 1.5-2 раза.

5. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участникам олимпиады сначала необходимо определить отношение освещенностей создаваемых Марсом и Антаресом. Для этого нужно определить отношение потоков энергии от них (2 балла), а также их угловые размеры (по 1 баллу за объект). Если за угловой размер Антареса принят размер дифракционного кружка Эри, этот 1 балл не выставляется. С другой стороны, школьник может принять размер кружка атмосферного рассеяния от 1 до 2 секунд, и это не считается ошибкой. Далее участник олимпиады должен показать, что благодаря дискретной структуре ПЗС-матрицы отношение освещенностей может изменяться. Рассмотрение случая попадания изображения Антареса в один пиксель и вычисление соответствующего фокусного расстояния оценивается в 3 балла. Учет (качественный) возможного попадания изображения Антареса на границу пикселей оценивается в 1 балл.

6. Условие. Перед Вами диаграмма Герцшпрунга – Рассела, на которую нанесены звезды в соответствии с их светимостью (или абсолютной звездной величиной в полосе V) и показателем цвета B–V (или эффективной температурой, если определять ее по этому показателю цвета). Предположим, у далекой звезды, похожей на Солнце и находящейся на оси главной последовательности, есть более слабый близкий спутник, также расположенный на оси главной последовательности. Система не разрешается в телескоп, и данные ее фотометрии относятся ко всей системе в целом. Нарисуйте фрагмент диаграммы вблизи положения Солнца и отметьте, куда на ней может попасть такая звезда. Определите максимально возможное смещение этой звезды от положения главной звезды по абсолютной звездной величине и температуре. Химический состав обеих звезд системы считать одинаковым, межзвездным поглощением света пренебречь.



6. Решение. По условию задачи спутник не может быть ярче главной звезды. С учетом одинакового химического состава можно сделать вывод, что его температура меньше температуры главной звезды, а цвет (B–V) больше, чем у главной звезды. Можно выделить два крайних случая. Если спутник такой же яркий, как и главная звезда, значит его температура такая же и цвет такой же. Показатель цвета двойной системы не изменится, а блеск возрастет на $2.5 \lg 2 \approx 0.75^m$. Напротив, очень слабый спутник практически не будет вносить вклада в суммарный блеск двойной, а значит и в ее цвет, т. е. двойная будет располагаться на диаграмме там же, где и главная звезда. В промежуточном случае блеск двойной будет немного ярче блеска главной звезды, а ее цвет больше, т. е. двойная звезда окажется на диаграмме выше и правее. Очевидно, что геометрическое место всех возможных положений двойной не отрезок прямой, а часть более сложной кривой.



Положение звезд на 1-2^m слабее Солнца на оси главной последовательности можно характеризовать прямой линией. Чтобы найти уравнение этой линии нужно определить на ней координаты двух точек: Солнца и какой-либо более слабой звезды (определяется по диаграмме). Коэффициент наклона получаем равным

$$\frac{(\mathrm{B-V})_1-(\mathrm{B-V})_0}{M_1-M_0}=K\approx 0.2=\frac{1}{5}.$$

Здесь индексы «0» и «1» относятся к Солнцу и более слабой звезде соответственно. Данная прямая показана пунктиром на диаграмме. Для наглядности она там продлена в область более слабых звезд. Там данная прямая зависимость нарушается, но эти звезды нас уже меньше интересуют как возможные спутники вследствие их слабости.

Предположим, у звезды – копии Солнца со светимостью J_0 есть звезда-спутник с яркостью $J=b\cdot J_0$ ($0<b\leq 1$). Тогда абсолютная звездная величина в полосе V для спутника составит

$$M_1 - M_0 = -2.5 \lg b,$$

Такие же разности будут иметь место для видимой звездной величины в полосе V. С учетом отсутствия межзвездного поглощения мы можем записать выражение для звездных величин в полосе B:

$$(\mathrm{B-V})_1 - (\mathrm{B-V})_0 = K(M_1 - M_0) = -(1/2) \lg b;$$
$$\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_0 = (\mathrm{B-V})_1 - (\mathrm{B-V})_0 + (\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_0);$$
$$\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_0 = (\mathrm{K}+1)\,(M_1 - M_0) = -3 \lg b;$$

Здесь мы учли, что абсолютные звездные величины M приведены в полосе V. Мы видим, что соотношение яркостей двух звезд в полосе B составит

$$\frac{J_{\mathrm{B1}}}{J_{\mathrm{B0}}}=10^{-0.4\cdot 3\lg b}=b^{1.2}.$$

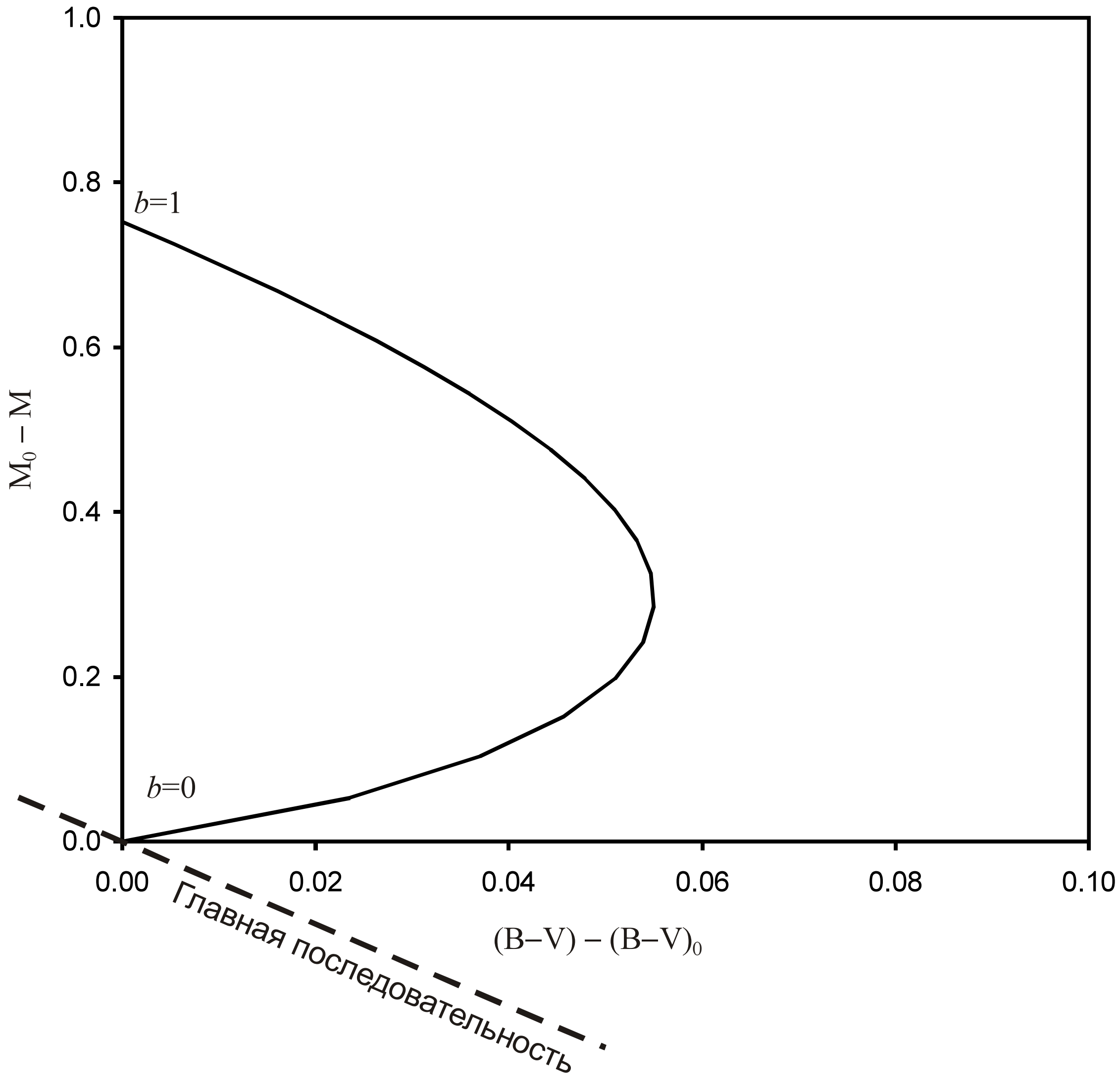
Результирующий показатель цвета двойной системы (по сравнению с солнечным) будет равен

$$(\mathrm{B-V})-(\mathrm{B-V})_0=-2.5\lg\frac{1+b^{1.2}}{1+b}.$$

Абсолютная звездная величина системы (по сравнению с солнечной) составит

$$M - M_0 = -2.5 \lg (1+b).$$

Мы получили выражения для обеих величин, стоящих по осям диаграммы. Для того, чтобы определить положение двойной системы, нужно вычислить эти величины для разных значений b от 0 до 1 и нарисовать соответствующий график.



Максимальный сдвиг по абсолютной звездной величине равен 2.5 lg 2 = 0.75, что соответствует очевидному случаю двух одинаковых звезд. Показатель цвета, а значит и измеренная по нему температура, не изменятся. Максимальный сдвиг по показателю цвета составляет примерно 0.055. По диаграмме видим, что это соответствует уменьшению эффективной температуры на 200 K.

6. Рекомендации для жюри. Данная задача является практической, поэтому вероятен существенный разброс численных результатов. Максимальное смещение по звездной величине оценивается просто и при этом точно. Участники олимпиады должны указать, что оно соответствует случаю одинаковых звезд в паре (2 балла) и получить значение 0.75^m (1 балл). На втором этапе, для оценки смещения по температуре участники олимпиады должны получить выражение для суммарного показателя цвета системы в зависимости от относительной яркости (либо цвета) звезды-спутника, что оценивается в 2 балла. Построение кривой на графике и оценка максимального смещения по температуре оценивается в 3 балла. Если оценка смещения по температуре делается грубо, без обоснований, из данных 5 баллов выставляется от 0 до 2 в зависимости от точности полученного результата.