8 класс

8.1. Графики трех функций $y = ax + a$, $y = bx + b$ и $y = cx + d$ имеют общую точку, причем $a \neq b$. Обязательно ли $c = d$? Ответ обоснуйте.

Ответ: да, обязательно.

Решение. *Первый способ.* Общую точку графиков первых двух функций можно найти из системы:

$$\begin{cases} y = ax + a, \\ y = bx + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + a, \\ ax + a = bx + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + a, \\ (a-b)x + (a-b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + a, \\ (a-b)(x+1) = 0. \end{cases}$$

Так как $a \neq b$, то решением системы является $x = -1$, $y = 0$.

Из условия задачи следует, что точка $(-1, 0)$ принадлежит и графику третьей функции. Тогда $0 = -c + d$, то есть $c = d$.

Второй способ. Если $x = -1$, $y = 0$, то уравнения $y = ax + a$ и $y = bx + b$ обращаются в верные равенства при любых значениях a и b. Поэтому точка $(-1; 0)$ принадлежит первым двум графикам (прямым). Так как $a \neq b$, то эти прямые различны, значит, другой общей точки у них нет. Следовательно, точка $(-1; 0)$ принадлежит и графику третьей функции. Тогда $0 = -c + d$, то есть $c = d$.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

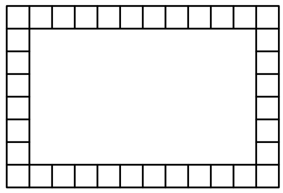
$\pm$ *приведено верное, в целом, рассуждение, но единственность общей точки не показана (не использовано условие $a \neq b$)*

$\mp$ *верно найдена или угадана общая точка первых двух графиков, но дальнейших продвижений нет*

$\mp$ *верный ответ получен в результате рассмотрения конкретных числовых значений коэффициентов*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*



8.2. Из клетчатой бумаги вырезана прямоугольная рамка (см. рисунок). Ее разрезали по границам клеток на девять частей и сложили из них квадрат 6×6. Могли ли все части, полученные при разрезании, оказаться различными? (*При складывании квадрата части можно переворачивать.*)

Ответ: да, могли.

Решение. На рис. 8.2а показано, каким образом может быть разрезана рамка в соответствии с условием задачи, а на рис. 8.2б — как из получившихся частей сложить квадрат.

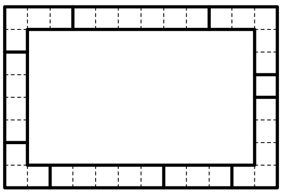


Рис. 8.2а

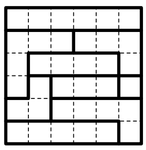


Рис. 8.2б

Возможны и другие способы решения.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верные рисунки, показывающие, как разрезать и как складывать*

$\pm$ *приведен только верный способ складывания квадрата, из которого можно восстановить способ разрезания рамки*

$\mp$ *приведен верный способ разрезания рамки, но как сложить квадрат, не показано*

$-$ *приведен только ответ (без примера)*

$-$ *задача не решена или решена неверно, например, какие-то части, полученные при разрезании, оказались одинаковыми*

8.3. Вершину A параллелограмма $ABCD$ соединили отрезками с серединами сторон BC и CD. Один из этих отрезков оказался вдвое длиннее другого. Определите, каким является угол BAD: острым, прямым или тупым.

Ответ: тупым.

Решение. Пусть N — середина BC, M — середина CD, $AN = 2AM$ (см. рис. 8.3 а, б).

Первый способ. Через точку M проведем прямую, параллельную BC. Она пересечет AB в точке K, причем $AK = KB$ (см. рис. 8.3а). Тогда по теореме Фалеса $AP = PN = 0{,}5AN = AM$. В равнобедренном треугольнике APM $\angle AMP = \angle APM < 90^\circ$, так как это углы при его основании. Следовательно, $\angle PAD = 180^\circ - \angle APM > 90^\circ$. Так как $\angle BAD > \angle PAD$, то $\angle BAD > 90^\circ$.

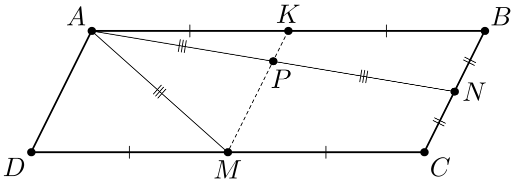


Рис. 8.3а

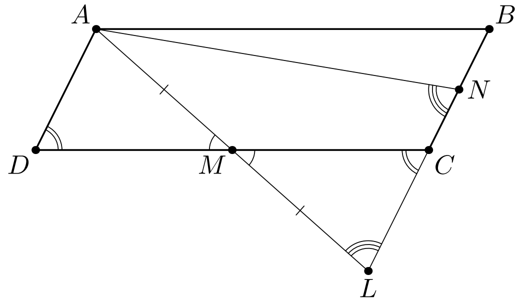


Рис. 8.3б

Второй способ. Продлим отрезок AM до пересечения с прямой BC в точке L. Треугольники DAM и CLM равны по стороне и двум прилежащим углам (см. рис. 8.3б). Следовательно, $AM = ML$, тогда $AL = 2AM = AN$. В равнобедренном треугольнике ANL $\angle ANL = \angle ALN < 90^\circ$. Угол ANL — внешний для треугольника ABN, значит, $\angle ABN < \angle ANL < 90^\circ$. Значит, $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABN > 90^\circ$.

Отметим, что, независимо от способа решения, последующее сравнение углов может осуществляться не только указанными способами.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное, в целом, решение, содержащее несущественные пробелы*

$\pm$ *полностью доказано, что угол BAD — не острый, но не доказано, что он не может быть прямым*

$\mp$ *доказано только, что угол BAD не может быть прямым*

$\mp$ *верный ответ получен в результате рассмотрения частных случаев*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

8.4. Три пирата вечером поделили добытые за день бриллианты: по двенадцать Биллу и Сэму, а остальные — Джону, который считать не умел. Ночью Билл у Сэма, Сэм у Джона, а Джон у Билла украли по одному бриллианту. В результате средняя масса бриллиантов у Билла уменьшилась на один карат, у Сэма уменьшилась на два карата, зато у Джона увеличилась на четыре карата. Сколько бриллиантов досталось Джону?

Ответ: 9 бриллиантов.

Решение. *Первый способ* («арифметический»). Заметим, что количество бриллиантов у каждого пирата за ночь не изменилось. Так как у Билла — 12 бриллиантов, а их средняя масса уменьшилась на 1 карат, то сумма их масс уменьшилась на 12 каратов. Аналогично, у Сэма — также 12 бриллиантов, их средняя масса уменьшилась на 2 карата, поэтому сумма их масс уменьшилась на 24 карата. Поскольку масса бриллиантов у Билла и Сэма уменьшилась на 36 каратов, то у Джона она на те же 36 каратов увеличилась. Так как средняя масса бриллиантов Джона увеличилась на 4 карата, то у него было $36 : 4 = 9$ бриллиантов.

Второй способ («алгебраический»). Пусть Джону досталось x бриллиантов. Обозначим среднюю массу бриллиантов, доставшихся Биллу, через b, Сэму — через s, Джону — через d. Тогда сумма масс бриллиантов у Билла была равна $12b$, у Сэма — $12s$, у Джона — xd.

Наутро количество бриллиантов у каждого не изменилось, а средняя масса бриллиантов стала: у Билла— $(b-1)$, у Сэма — $(s-2)$, у Джона — $(d+4)$. Сумма масс бриллиантов стала: у Билла — $12(b-1)$, у Сэма — $12(s-2)$, у Джона — $x(d+4)$. Так как сумма масс бриллиантов у трёх пиратов не изменилась, то $12b + 12s + xd = 12(b-1) + 12(s-2) + x(d+4)$. Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим: $4x - 36 = 0$, то есть $x = 9$.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное, в целом, решение, но допущена арифметическая ошибка*

$\mp$ *уравнение составлено верно, но не решено или решено неверно*

$\mp$ *верный ответ получен на конкретном примере*

— *приведен только ответ*
— *задача не решена или решена неверно*

8.5. В треугольнике ABC угол B равен 120°, $AB = 2BC$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает AC в точке D. Найдите отношение $AD : DC$.

Ответ: $AD : DC = 2 : 3$.

Решение. *Первый способ.* Пусть M — середина стороны AB. Опустим перпендикуляр CH на прямую AB (см. рис. 8.5а). В прямоугольном треугольнике BHC: $\angle HBC = 60^\circ$, тогда $\angle BCH = 30^\circ$, поэтому $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}AM$. Значит, $HM : MA = 3 : 2$. Так как $MD \parallel CH$, то по теореме о пропорциональных отрезках $CD : DA = HM : MA = 3 : 2$.

Второй способ. Пусть M – середина стороны AB. Продлим отрезок DM до пересечения с продолжением стороны BC в точке K (см. рис. 8.5б). Так как точка K лежит на серединном перпендикуляре к AB, то $KA = KB$. В равнобедренном треугольнике AKB $\angle ABK = 60^\circ$, значит, этот треугольник — равносторонний. Тогда $KC = KB + BC = \frac{1}{2}AB + AB = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{2}KA$. Высота KM треугольника AKB является и его биссектрисой, значит, KD — биссектриса треугольника AKC. По свойству биссектрисы треугольника $CD : DA = KC : KA = 3 : 2$.

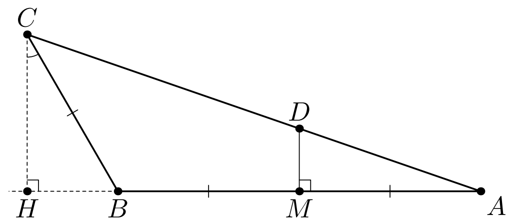


Рис. 8.5а

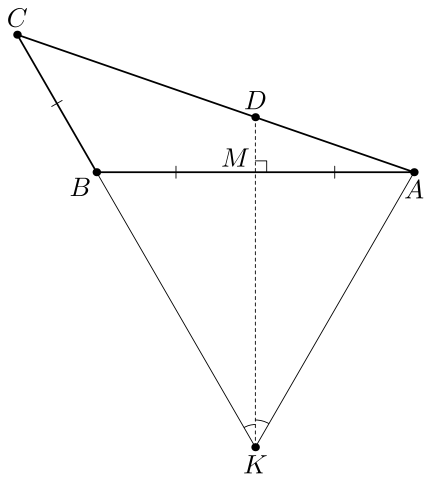


Рис. 8.5б

Критерии проверки:
+ *приведено полное обоснованное решение*
± *приведено верное, в целом, решение, но допущены незначительные пробелы или неточности*
∓ *приведен только верный ответ*
— *задача не решена или решена неверно*

6. Гномы сели за круглый стол и голосованием решили много вопросов. По каждому вопросу можно было голосовать «за», «против» или воздержаться. Если оба соседа какого-либо гнома по какому-нибудь вопросу выбрали один и тот же вариант ответа, то при голосовании по следующему вопросу он выберет этот же вариант. А если они выбрали два разных варианта, то при голосовании по следующему вопросу гном выберет третий вариант. Известно, что по вопросу «Блестит ли золото?» все гномы проголосовали «за», а по вопросу «Страшен ли Дракон?» Торин воздержался. Сколько могло быть гномов? (*Опишите все возможности и докажите, что других нет.*)

Ответ: количество гномов могло быть любым, кратным 4.

Решение. Если по какому-либо вопросу гномы проголосовали единогласно, то после этого они всегда будут голосовать точно так же. Поэтому вопрос о драконе обсуждался раньше, чем вопрос о золоте.

Возможно, что перед вопросом о золоте гномы уже несколько раз единогласно голосовали «за». Рассмотрим последний вопрос, по которому был несогласный гном (а такой точно был, что следует из условия про Торина). Пусть этот гном голосовал «против». Для того, чтобы его соседи в следующий раз проголосовали «за», гномы, сидящие от него через одного, должны были воздержаться. Аналогично, гномы, сидящие от них через одного, должны были голосовать «против», и так далее. Получаем цепочку ...П?В?П?В?..., где «П» и «В» обозначают голосовавших «против» и воздержавшихся, а знаки вопроса — гномов, мнение которых нас не интересует. В случае, если несогласный гном воздержался, получаем такую же цепочку.

Если количество гномов — четное, то цепочка должна замкнуться, а это значит, что в ней одинаковое количество «В» и «П». Тогда количество гномов, обозначенных «В» и «П», четно, а количество всех гномов — вдвое больше.

Если же количество гномов — нечетное, то расставив по кругу «В» и «П», мы продолжим их ставить вместо знаков вопроса, то есть гномы расположатся по кругу парами: ...ВВППВВПП..., что противоречит тому, что их количество нечетно.

Осталось показать на примере, что любое количество гномов, кратное 4, удовлетворяет условию задачи. Для этого, пусть они сначала проголосуют про дракона так: ...ВВППВВПП... (один из «В» — это Торин), а потом про золото единогласно «за».

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *решение, в целом, верное, но содержит один или более из трех недочетов*: 1) *не пояснено, почему про дракона проголосовали раньше, чем про золото*; 2) *не приведен пример*; 3) *предполагается, что вопросы о драконе и о золоте обсуждались подряд*

$\mp$ *приведены только верный ответ и пример голосования, его подтверждающий*

$\mp$ *верно разобран только один из двух случаев* (*четности или нечетности количества гномов*)

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*