10 класс

Первый день

10.1. Назовём натуральное число *почти квадратом*, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов.

10.2. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB < AC < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D; при этом отрезки AD и CE пересекаются. Оказалось, что $\angle ABF = \angle DCE$. Найдите угол ABC.

10.3. На соревнованиях по фигурному велосипедированию было 100 судей. Каждый судья упорядочил всех участников (от лучшего по его мнению — к худшему). Оказалось, что ни для каких трёх участников A, B, C не нашлось трёх судей, один из которых считает, что A — лучший из трёх, а B — худший, другой — что B лучший, а C худший, а третий — что C лучший, а A худший. Докажите, что можно составить общий рейтинг участников так, чтобы для любых двух участников A и B тот, кто выше в рейтинге, был бы лучше другого по мнению хотя бы половины судей.

10.4. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр натурального числа k. Натуральное число a назовём *n-хорошим*, если существует такая последовательность натуральных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, что $a_n = a$ и $a_{i+1} = a_i - S(a_i)$ при всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Верно ли, что для любого натурального n существует натуральное число, являющееся n-хорошим, но не являющееся $(n+1)$-хорошим?

XLI Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. Назовём натуральное число *почти квадратом*, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов.

10.2. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB < AC < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D; при этом отрезки AD и CE пересекаются. Оказалось, что $\angle ABF = \angle DCE$. Найдите угол ABC.

10.3. На соревнованиях по фигурному велосипедированию было 100 судей. Каждый судья упорядочил всех участников (от лучшего по его мнению — к худшему). Оказалось, что ни для каких трёх участников A, B, C не нашлось трёх судей, один из которых считает, что A — лучший из трёх, а B — худший, другой — что B лучший, а C худший, а третий — что C лучший, а A худший. Докажите, что можно составить общий рейтинг участников так, чтобы для любых двух участников A и B тот, кто выше в рейтинге, был бы лучше другого по мнению хотя бы половины судей.

10.4. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр натурального числа k. Натуральное число a назовём *n-хорошим*, если существует такая последовательность натуральных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, что $a_n = a$ и $a_{i+1} = a_i - S(a_i)$ при всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Верно ли, что для любого натурального n существует натуральное число, являющееся n-хорошим, но не являющееся $(n+1)$-хорошим?