11 класс

11.1. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D. Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол ABC.

(*А. Якубов*)

Ответ. 60°.

Решение. Пусть ℓ — биссектриса угла EDF. Поскольку DE и DF — касательные к ω, прямая ℓ проходит через центр O окружности ω.

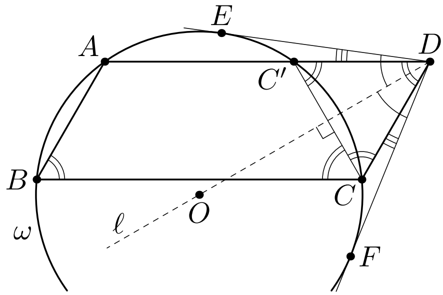

Рис. 3

Совершим симметрию относительно ℓ. Так как $\angle EDA = \angle FDC$, луч DC перейдёт в луч DA. Поскольку ℓ проходит через O, окружность ω перейдет в себя; значит, точка C переходит в точку C', лежащую на DA и на ω. При этом, так как $AD \neq DC$, точки C' и A различны (см. рис. 3).

Из той же симметрии имеем $\angle DCC' = \angle DC'C$. Так как точки A, B, C и C' лежат на ω, имеем $\angle DC'C = \angle ABC = \angle ADC$. Итак, все три угла треугольника DCC' равны, откуда $\angle ABC = \angle CDC' = 60^\circ$.

11.2. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Выпишем дроби $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\ldots$, $\frac{n-1}{n}$ и приведём каждую к несократимому виду; сумму числителей полученных дробей обозначим через $f(n)$. При каких натуральных $n > 1$ числа $f(n)$ и $f(2015n)$ имеют разную чётность?

(*А. С. Голованов*)

Ответ. При всех натуральных $n > 1$.

Первое решение. Пусть $n = 2^t \cdot m$, где $t \geqslant 0$, а число m нечётно.

Рассмотрим произвольную дробь $\frac{k}{n}$. Если k делится на 2^{t+1}, то числитель этой дроби после сокращения будет чётен, в противном случае он будет нечётен. Среди чисел $1, 2, \ldots, n-1$ есть ровно $\frac{m-1}{2}$ чисел, делящихся на 2^{t+1}. Значит, в сумме $f(n)$ имеется ровно $n - 1 - \frac{m-1}{2}$ нечётных слагаемых. Поэтому $f(n)$ чётно тогда и только тогда, когда числа $n-1$ и $\frac{m-1}{2}$ имеют одинаковую чётность, т.е. в следующих двух случаях: либо n нечётно и $m \equiv 1 \pmod 4$, либо же n чётно и $m \equiv 3 \pmod 4$.

Осталось заметить, что числа n и $2015n$ имеют одну чётность; кроме того, при нечётном m числа m и $2015m$ дают разные остатки при делении на 4. Значит, числа $f(n)$ и $f(2015n)$ всегда имеют разную чётность.

Второе решение. Опять же представим n в виде $n = 2^t \cdot m$, где $t \geqslant 0$, а число m нечётно. Приведём другое доказательство того, что число $f(n)$ чётно ровно в двух случаях: либо n нечётно и $m \equiv 1 \pmod 4$, либо же n чётно и $m \equiv 3 \pmod 4$. Положим для удобства $f(1) = 0$.

Пусть n нечётно (т.е. $t = 0$). Тогда числитель дроби $\frac{k}{n}$ не меняет чётность после сокращения. Значит, количество нечётных числителей будет равно $\frac{n-1}{2}$, и число $f(n)$ чётно ровно тогда, когда чётно число $\frac{n-1}{2}$, т.е. при $m \equiv 1 \pmod 4$.

Пусть теперь n чётно (т.е. $t > 0$). Среди дробей со знаменателем n есть дробь, равная $\frac{1}{2}$ и вносящая в $f(n)$ слагаемое 1. Все остальные дроби разбиваются на пары вида $(\frac{a}{n}, \frac{n-a}{n})$. Поскольку сумма дробей в паре равна 1, после сокращения они переходят в пары несократимых дробей с одинаковым знаменателем вида $(\frac{b}{d}, \frac{d-b}{d})$. Вклад такой пары дробей в $f(n)$ равен d, и, если d чётно, он не влияет на чётность числа $f(n)$.

Таким образом, чётность $f(n)$ противоположна чётности аналогичной суммы для дробей $\frac{2^t}{2^t m}, \frac{2 \cdot 2^t}{2^t m}, \ldots, \frac{(m-1)2^t}{2^t m}$, то есть чётности числа $f(m)$ (при $m = 1$ она противоположна чётности $f(1) = 0$). Отсюда и следует требуемое.

11.3. В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более, чем четырём из остальных 109 команд. (*С. Берлов*)

Решение. Лемма. *Пусть $k \geqslant 55$, и пусть среди любых k команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных $k-1$ команд. Тогда и среди любых $k+1$ команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных k команд.*

Доказательство. Предположив противное, рассмотрим набор из $k+1$ команд $M = \{C_1, C_2, \ldots, C_{k+1}\}$, для которых требуемой команды не найдётся. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k+1$, если выкинуть из M команду C_i, то среди оставшихся найдётся команда C_j, проигравшая не более, чем четырём из остальных. Поскольку C_j не является требуемой для всего набора M, она проиграла также команде C_i и, более того, проиграла ровно пяти командам из M. Назовём такую команду C_j *подходящей* для команды C_i.

Рассмотрим все команды из M, являющиеся подходящими хотя бы для одной другой команды. Каждая из них является подходящей максимум для пяти из $k+1 \geqslant 56$ команд; значит, по принципу Дирихле, число s подходящих команд не менее 12.

Рассмотрим все игры между подходящими командами. Этих игр всего $s(s-1)/2$, и в каждой из них одна из s подходящих команд проиграла. Опять же по принципу Дирихле, одна из подходящих команд проиграла не менее, чем $\dfrac{s(s-1)}{2} : s = \dfrac{s-1}{2} \geqslant \dfrac{11}{2}$ другим подходящим командам. Значит, одна из подходящих команд проиграла хотя бы шести командам, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Для решения задачи покажем индукцией по $k = 55, 56, \ldots, 110$, что среди любых k команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных $k-1$ команд. База при $k=55$ верна по условию, а переход доказан в лемме. Значит, это утверждение верно при $k=110$, что и требовалось.

11.4. Дано натуральное число $N \geqslant 3$. Назовём набор из N точек на координатной плоскости *допустимым*, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *разделяет* допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из N точек можно разделить многочленом степени не более k? (*К. Тыщук*)

Ответ. $k=N-2$.

Решение. Докажем, что $k=N-2$ подходит. Возьмем произвольные $N-1$ из данных N точек; существует многочлен степени, не большей $N-2$, график которого проходит через них. Этот многочлен, очевидно, разделяет наши точки.

Осталось построить пример допустимого набора, который нельзя разделить многочленом степени, меньшей $N-2$. Возьмем график некоторого приведённого многочлена $f(x)$ степени $N-2$ и расположим на нем N точек, чередуя цвета. Предположим, что некоторый многочлен $P(x)$, степень которого не больше $N-3$, разделяет эти точки; можно считать, что ниже графика $P(x)$ нет красных точек, а выше — синих.

Обозначим $Q(x)=f(x)-P(x)$; степень многочлена $Q(x)$ равна $N-2 \geqslant 1$. Кроме того, если r и b — абсциссы произвольных красной и синей точек, то $P(r) \leqslant f(r)$ и $P(b) \geqslant f(b)$, то есть $Q(r) \geqslant 0$ и $Q(b) \leqslant 0$.

Заметим, что если $Q(s) \leqslant Q(t)$ при некоторых $s<t$, то существует такая точка $u \in (s,t)$, для которой $Q'(u)>0$ (здесь использовано, что $Q(x)$ непостоянен). Это значит, что на любом интервале между красной и синей точками (красная левее синей) найдется точка, в которой значение $Q'(x)$ положительно. Аналогично, на любом интервале между синей и красной точками найдется точка, в которой значение $Q'(x)$ отрицательно. Итого, мы нашли $N-1$ точек, в которых $Q'(x)$ принимает значения чередующихся знаков. Между любыми такими соседними точками $Q'(x)$ имеет корень. Следовательно, у многочлена $Q'(x)$ не менее $N-2$ корней. Но это невозможно, так как $Q'(x)$ — многочлен степени $N-3$. Противоречие.

Замечание. Немного изменив рассуждения, можно показать, что в качестве $f(x)$ можно взять любую функцию, у которой $(N-2)$-я производная не имеет корней; подойдёт, например, $f(x)=2^x$. Действительно, из того, что у $Q'(x)$ не меньше $N-2$ корней, следует, что у $(N-2)$-й производной функции $Q(x)$ не менее одного корня; но $Q^{(N-2)}(x) = f^{(N-2)}(x) - P^{(N-2)}(x) = f^{(N-2)}(x)$. Противоречие.