10 класс

10.1. Назовём натуральное число *почти квадратом*, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов. (*В. Сендеров*)

Решение. Любой почти квадрат можно записать в виде
$$n(n+1) = \frac{n(n+2)(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n^2+2n)(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)}.$$
В числителе и знаменателе последней дроби, очевидно, также стоят почти квадраты.

10.2. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB < AC < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D; при этом отрезки AD и CE пересекаются. Оказалось, что $\angle ABF = \angle DCE$. Найдите угол ABC. (*А. Якубов, С. Берлов*)

Ответ. 60°.

Решение. Так как D лежит вне ω, угол ABC острый. Пусть A' — вторая точка пересечения DC и ω. Поскольку $BC > AC$, имеем $\angle DCA = \angle CAB > \angle CBA = \angle DA'A$; значит, A' лежит на продолжении отрезка DC за точку C. Заметим, что $\overset{\frown}{ECA'} = 2(180^\circ - \angle ECA') = 2\angle ECD = 2\angle ABF = \overset{\frown}{ACF}$ (см. рис. 2).

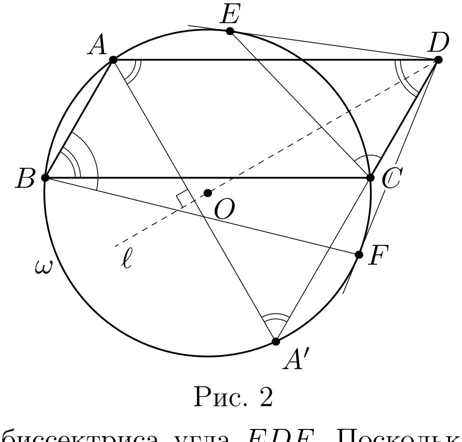

Рис. 2

Пусть ℓ — биссектриса угла EDF. Поскольку DE и DF — касательные к ω, прямая ℓ проходит через центр O окружности ω. Совершим симметрию относительно ℓ; при этом ω перейдёт в себя. Так как $\overset{\frown}{ECA'} = \overset{\frown}{ACF}$, точки A и A' при этой симметрии переходят друг в друга. Значит, $\angle DAA' = \angle DA'A$. С другой стороны, поскольку точка A' лежит на ω, имеем $\angle AA'C = \angle ABC = \angle ADA'$. Итак, все три угла треугольника DAA' равны, откуда $\angle ABC = \angle ADA' = 60°$.

10.3. На соревнованиях по фигурному велосипедированию было 100 судей. Каждый судья упорядочил всех участников (от лучшего по его мнению — к худшему). Оказалось, что ни для каких трёх участников A, B, C не нашлось трёх судей, один из которых считает, что A — лучший из трёх, а B — худший, другой — что B лучший, а C худший, а третий — что C лучший, а A худший. Докажите, что можно составить общий рейтинг участников так, чтобы для любых двух участников A и B тот, кто выше в рейтинге, был бы лучше другого по мнению хотя бы половины судей. (*И. Богданов*)

Решение. Построим граф, вершинами которого будут участники, и от A будет идти ориентированное ребро к B, если A лучше B по мнению хотя бы 51 судьи (в этом случае мы будем писать $A \to B$). Таким образом, A и B не будут соединены ребром ровно тогда, когда каждый лучше другого по мнению ровно 50 судей.

Лемма. *Если $A \to B$ и $B \to C$, то $A \to C$.*

Доказательство. Предположим противное: C лучше A по мнению хотя бы 50 судей. Мы знаем, что B лучше A по мнению не более 49 судей; значит, найдётся судья, который считает, что C лучше A, а A лучше B. Аналогично, найдётся судья, считающий, что B лучше C, а тот лучше A, а также судья, считающий, что A лучше B, а тот лучше C. Существование этих трёх судей противоречат условию. □

Перейдём к решению. Докажем индукцией по n, что в ориентированном графе на n вершинах, для которого выполнено утверждение леммы, можно пронумеровать вершины так, чтобы каждая стрелка шла от меньшего числа к большему. Из этого следует утверждение задачи.

Индукция по n. При $n = 2$ утверждение очевидно. Для перехода докажем, что найдётся вершина A, из которой не идёт ни одной стрелки. Тогда можно этой вершине присвоить номер n, выбросить её и перенумеровать остальные вершины по предположению индукции.

Предположим, что такой вершины A нет. Тогда в каждую вершину ведёт по стрелке. Выйдем из любой вершины и будем двигаться против направления стрелок. Рано или поздно мы попадём в вершину, в которой уже были; таким образом, в графе нашёлся ориентированный цикл. Выберем из всех таких циклов цикл $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_k \to A_1$ наименьшей длины k.

Ясно, что $k \geqslant 3$. Если $k = 3$, то тройка вершин A_1, A_2, A_3 противоречит утверждению леммы. Если же $k > 3$, то из $A_{k-1} \to A_k \to A_1$ по лемме имеем $A_{k-1} \to A_1$, и мы нашли более короткий цикл $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_{k-1} \to A_1$. В любом случае мы пришли к противоречию, что и доказывает требуемое.

Замечание. Можно облегчить решение, применив следующий трюк. Введём 101-го судью, мнение которого будет совпадать с мнением 100-го. Достаточно доказать, что в новой ситуации можно составить общий рейтинг так, чтобы любые два участника были упорядочены так, как считает большинство судей (тогда в исходной ситуации так будет считать не менее половины). Дальнейшее решение несколько облегчается, поскольку в этом случае любые две вершины соответствующего графа будут соединены ребром.

10.4. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр натурального числа k. Натуральное число a назовём *n-хорошим*, если существует такая последовательность натуральных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, что $a_n = a$ и $a_{i+1} = a_i - S(a_i)$ при всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Верно ли, что для любого натурального n существует натуральное число, являющееся n-хорошим, но не являющееся $(n+1)$-хорошим?

(*А. Антропов*)

Ответ. Да.

Решение. Для натуральных n и k введём обозначения $f(n) = n - S(n)$ и $f^k(n) = \underbrace{f(f(\ldots(}_{k}n)\ldots))$. При увеличении числа n на 1, число $S(n)$ либо увеличивается на 1 (если n не заканчивается на 9), либо уменьшается. Это значит, что функция f нестрого возрастает, причём $f(n+10) > f(n)$ при всех n.

Первое решение. Выберем натуральное d такое, что $10^d > 20d(n+1)$, и обозначим $k = 10^d$. Пусть $b_0 = 10^k - 1$ и $c_0 = 10^k - k$. Положим $b_i = f^i(b_0)$ и $c_i = f^i(c_0)$. Мы докажем, что

$$b_n > c_n > b_{n+1}. \qquad (*)$$

Для этого мы оценим числа b_i и c_i при всех $i \leqslant n+1$.

Так как $S(c_i) \leqslant 9k$, по индукции получаем $c_i \geqslant 10^k - k - 9ki$. При $i \leqslant n+1$ имеем $(9i+1)k \leqslant 10ki \leqslant 10^{d+1}(n+1) < 10^{2d}$, а значит, в числе c_i хотя бы $k-2d$ первых цифр — девятки. Поэтому $S(c_i) \geqslant 9(k-2d)$, откуда (опять же по индукции) имеем $c_i \leqslant 10^k - k - 9(k-2d)i$. Итак,

$$10^k - (9i+1)k \leqslant c_i \leqslant 10^k - k - 9(k-2d)i.$$

Аналогично, для b_i получаются оценки

$$10^k - 9ki - 1 \leqslant b_i \leqslant 10^k - 1 - 9(k-2d)i.$$

Таким образом, для доказательства неравенства $c_n < b_n$ достаточно проверить, что

$$10^k - k - 9(k-2d)n < 10^k - 9kn - 1,$$

т. е. $k > 18dn + 1$; это верно в силу выбора d. Чтобы доказать неравенство $b_{n+1} < c_n$, достаточно проверить, что

$$10^k - 1 - 9(k-2d)(n+1) < 10^k - (9n+1)k,$$

т. е. $8k + 1 > 18d(n+1)$, что опять же верно. Итак, $(*)$ доказано.

Из $(*)$ нетрудно вывести, что число c_n является n-хорошим, но не является $(n+1)$-хорошим. Первое верно, поскольку $c_n = f^n(c_0)$. Осталось показать, что $c_n \neq f^{n+1}(x)$ при всех натуральных x. Если $x \leqslant 10^k - 1 = b_0$, то $f^{n+1}(x) \leqslant f^{n+1}(b_0) = b_{n+1} < c_n$. Если же $x \geqslant 10^k$, то $f(x) \geqslant f(10^k) = b_0$, и поэтому $f^{n+1}(x) \geqslant f^n(b_0) = b_n > c_n$.

Второе решение. Предположим противное: любое n-хорошее число x является $(n+1)$-хорошим. Это значит, что $x = f^{n+1}(y)$ при некотором y. Тогда число $f(y)$ является n-хорошим — а значит, и $(n+1)$-хорошим; из этого, в свою очередь следует, что x является $(n+2)$-хорошим. Аналогично показывается, что любое n-хорошее число является $(n+k)$-хорошим при всех натуральных k; назовём такое число просто *хорошим*.

Выберем теперь натуральное $k > 3 \cdot 10^n$ и оценим количество D_k хороших k-значных чисел двумя способами.

1. Для каждого числа $y \in [2 \cdot 10^{k-1}, 10^k)$ число $g(y) = f^n(y)$ является хорошим. Кроме того, $g(y) \geqslant y - n \cdot 9k \geqslant y - 10^{k-1} \geqslant$ $\geqslant 10^{k-1}$, то есть $g(y)$ — хорошее k-значное число. С другой стороны, уравнение $f(x) = a$ имеет не более 10 решений при любом a, поэтому уравнение $g(y) = a$ имеет не более 10^n решений. Значит, $D_k \geqslant \dfrac{10^k - 2 \cdot 10^{k-1}}{10^n} > 24 \cdot 10^{k-1}/k$.

2. Пусть x — хорошее k-значное число. Тогда $x = f^{10^k}(y)$ при некотором y. Так как $f^{10^k}(y) \leqslant y - 10^k$, число y хотя бы $(k+1)$-значно. Пусть s — наименьшее число, для которого $f^s(y)$ является k-значным числом. Тогда $f^{s-1}(y) \geqslant 10^k$, откуда $f^s(y) = f(f^{s-1}(y)) \geqslant f(10^k) = 10^k - 1$. Таким образом, $f^s(y) = 10^k - 1$, то есть любое k-значное хорошее число есть $f^t(10^k - 1)$ при некотором t.

Покажем, что число $f^t(10^k - 1)$ может являться k-значным лишь при $t < t_0 = [20 \cdot 10^{k-1}/k] + 1$; отсюда будет следовать, что $D_k \leqslant 20 \cdot 10^{k-1}/k + 1$, что противоречит оценке из предыдущего пункта. Положим $b_0 = 10^k - 1$, $b_i = f^i(b_0)$. Достаточно показать, что $b_{t_0} < 10^{k-1}$.

Предположим противное; тогда все числа b_i при $i \leqslant t_0$ являются k-значными. Оценим количество индексов $i < t_0$ таких, что $b_i - b_{i+1} < k$ (т.е. $S(b_i) < k$). Цифры любого такого числа b_i образуют последовательность из k неотрицательных целых чисел с суммой, не большей $k-1$. Как известно, существует ровно C_{2k-1}^{k-1} таких последовательностей. Значит, и требуемых индексов не больше, чем $C_{2k-1}^{k-1} < 2^{2k-1}$.

Итак, в последовательности $b_0, b_1, \ldots, b_{t_0}$ следующее число меньше предыдущего хотя бы на k как минимум в $t_0 - 2^{2k-1}$ случаях. Заметим, что $t_0 - 2^{2k-1} \geqslant 20 \cdot 10^{k-1}/k - 2^{2k-1} \geqslant 10^k/k$, поскольку $k \cdot 2^{2k-1} \leqslant 10^k$. Поэтому

$$b_{t_0} \leqslant b_0 - (t_0 - 2^{2k-1})k \leqslant 10^k - 10^k = 0.$$

Противоречие.