11 класс

XI. 1 ВЕСЕННИЕ РАССВЕТЫ

О.С. Угольников

? В таблице (на обороте) приведены измеренные моменты восхода верхнего края Солнца (среднее солнечное время) в течение 21 дня в марте в пункте с широтой +60° на уровне моря. Указаны значения температуры и атмосферного давления в этот момент. Для моментов восхода также даются значения склонения центра Солнца и уравнения времени. Исходя из этого, получите эмпирическое выражение для величины атмосферной рефракции у горизонта в зависимости от температуры и давления. Угловой радиус Солнца считать постоянным (16′05″).

! Для того, чтобы получить требуемую формулу, нужно получить значения атмосферной рефракции у горизонта хотя бы в некоторые дни при разных давлениях и температурах. В таблице приведены моменты восхода верхнего края Солнца над горизонтом. В это время истинная высота центра Солнца над горизонтом отрицательна и составляет

$$h = -r - \rho.$$

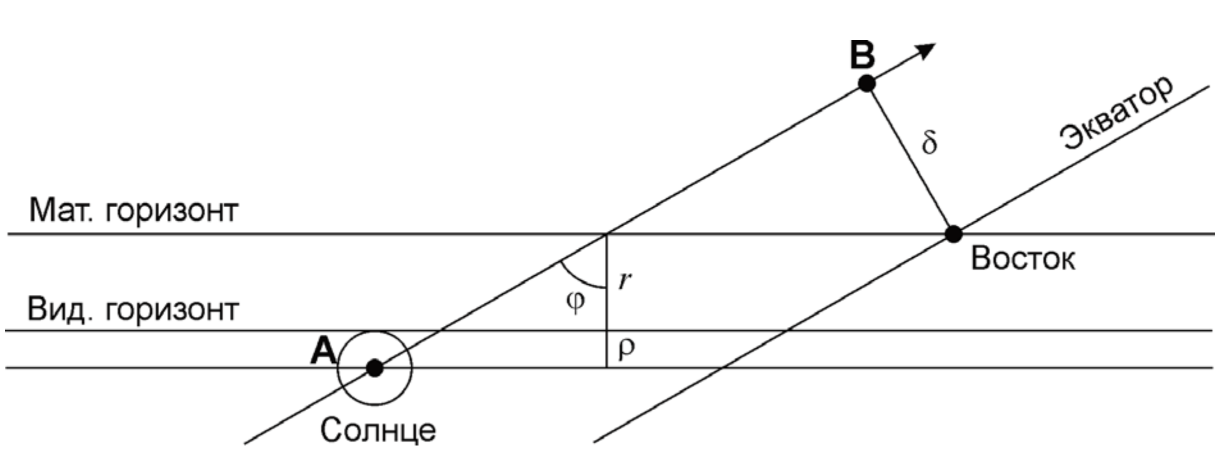
Дата	T	P	Склонение Солнца				Уравнение времени			Момент восхода		
	°C	мм.рт.ст.		°	′	″		м	с	ч	м	с
Март 8	–28	749	–	05	00	28	+	10	55	06	36	52
9	–21	754	–	04	37	06	+	10	40	06	34	16
10	–24	747	–	04	13	40	+	10	25	06	31	10
11	–27	746	–	03	50	12	+	10	10	06	28	01
12	–20	741	–	03	26	41	+	09	54	06	25	29
13	–20	734	–	03	03	07	+	09	38	06	22	32
14	–12	730	–	02	39	31	+	09	21	06	20	01
15	–6	740	–	02	15	54	+	09	05	06	17	18
16	–6	748	–	01	52	16	+	08	48	06	14	13
17	+1	738	–	01	28	36	+	08	32	06	11	41
18	–6	731	–	01	04	56	+	08	15	06	08	19
19	–5	733	–	00	41	16	+	07	57	06	05	19
20	–14	739	–	00	17	35	+	07	39	06	01	43
21	–10	745	+	00	06	04	+	07	22	05	58	54
22	–5	746	+	00	29	43	+	07	04	05	56	09
23	–10	750	+	00	53	21	+	06	46	05	52	47
24	–8	760	+	01	16	57	+	06	28	05	49	48
25	–5	770	+	01	40	31	+	06	10	05	46	53
26	–10	766	+	02	04	04	+	05	52	05	43	34
27	–18	766	+	02	27	33	+	05	34	05	40	03
28	–10	766	+	02	51	00	+	05	15	05	37	29

Здесь ρ – угловой радиус Солнца, а r – атмосферная рефракция у горизонта. Часовой угол Солнца τ связан со средним солнечным временем t как

$$\tau = t - (12^{ч} + \eta).$$

Здесь η – уравнение времени, приведенное в таблице. Используя эти два соотношения, можно вычислить истинную высоту центра Солнца в момент видимого восхода его верхнего края с помощью формул сферической тригонометрии. Однако, существует более простой путь. Используем тот факт, что наблюдения проводились вблизи весеннего равноденствия, восход Солнца происходил вблизи точки востока. Изобразим участок неба вблизи этой точки (рисунок снизу).

Если бы Солнце находилось точно на небесном экваторе и не имело угловых размеров, а на Земле не было атмосферы, то восход наблюдался бы в момент $6^{ч} + \eta$. В реальности, верхняя точка солнечного диска с часовым углом $-6^{ч}$ (точка



В на рисунке) не совпадает с видимым горизонтом. Смещение времени момента восхода (отрезок **АВ** по модулю), как видно из рисунка, составляет:

$$\Delta t = -\frac{r+\rho}{\cos\varphi} - \delta\,\mathrm{tg}\varphi.$$

Если склонение Солнца меньше нуля, то величина Δt может быть и положительной (восход Солнца происходит позже $6^{ч} + \eta$). Отсюда мы получаем приближенное выражение для рефракции:

$$r = -\delta\sin\varphi - \Delta t\cos\varphi - \rho;$$

$$\Delta t = t_{В} - (6^{ч} + \eta).$$

Здесь $t_{В}$ – измеренное время восхода верхнего края Солнца. В таблице (на следующей странице) для каждого из 21 дней приведены значения рефракции у горизонта r. Для сравнения даны истинные значения r_0, полученные по формулам сферической тригонометрии (не требуется от участников). Мы видим, что указанная методика позволяет определить величину рефракции с точностью лучше $1'$, а в интервале от 14 до 23 марта – с точностью лучше $0.1'$.

Вообще говоря, для решения задачи нет необходимости вычислять значение рефракции для каждого из дней. Достаточно выделить характерные дни с равной температурой (давлением), чтобы определить зависимость рефракции от давления (температуры). При этом лучше выбирать дни ближе к равноденствию, когда точность вычисления величины r лучше.

Обратим внимание на восходы Солнца 15, 16 и 18 марта, когда температура была одинакова (–6°C), а давление существенно различалось. Можно убедиться, что для них рефракция оказывается в точности пропорциональной давлению:

Дата		T, °C	P, мм рт. ст.	r, ′	r_0, ′
Март	8	–28	749	49.53	50.36
	9	–21	754	46.94	47.57
	10	–24	747	48.02	48.46
	11	–27	746	49.43	49.72
	12	–20	741	46.12	46.31
	13	–20	734	45.76	45.88
	14	–12	730	42.10	42.17
	15	–6	740	40.08	40.12
	16	–6	748	40.54	40.55
	17	+1	738	36.95	36.95
	18	–6	731	39.63	39.63
	19	–5	733	39.30	39.30
	20	–14	739	43.56	43.56
	21	–10	745	42.16	42.15
	22	–5	746	40.03	40.00
	23	–10	750	42.51	42.43
	24	–8	760	42.23	42.10
	25	–5	770	41.50	41.29
	26	–10	766	43.69	43.34
	27	–18	766	47.50	46.97
	28	–10	766	44.04	43.34

$$r\,(T=-6^\circ\,\mathrm{C}) = r_{760}\frac{P}{760\,\text{мм рт.ст.}};\quad r_{760}(T=-6^\circ\,\mathrm{C}) = 41.2'.$$

20 марта температура опустилась до –14°С. Записывая аналогичную зависимость $r(P)$ для этой температуры

$$r\,(T=-14^\circ\,\mathrm{C}) = r_{760}(T=-14^\circ\,\mathrm{C})\frac{P}{760\,\text{мм рт.ст.}},$$

с учетом давления в это утро (739 мм рт. ст.), получаем значение

$$r_{760}(T=-14^\circ\,\mathrm{C}) = r(P,T)\frac{760\,\text{мм рт.ст.}}{P} = 44.8'.$$

Обратим внимание на высокие значения рефракции при минусовых температурах. Будем считать, что величина r_{760} линейно меняется с температурой (в реальности, это так только в узких интервалах температур):

$$\mathrm{r}_{760} = A + B\cdot T(^\circ\mathrm{C}).$$

Тогда, имея данные для температур T_1 и T_2:

$$A = \frac{r_{760}(T_2)T_1 - r_{760}(T_1)T_2}{T_1 - T_2} = 38.5';$$

$$B = \frac{r_{760}(T_1) - r_{760}(T_2)}{T_1 - T_2} = -0.45'/^\circ\mathrm{C}.$$

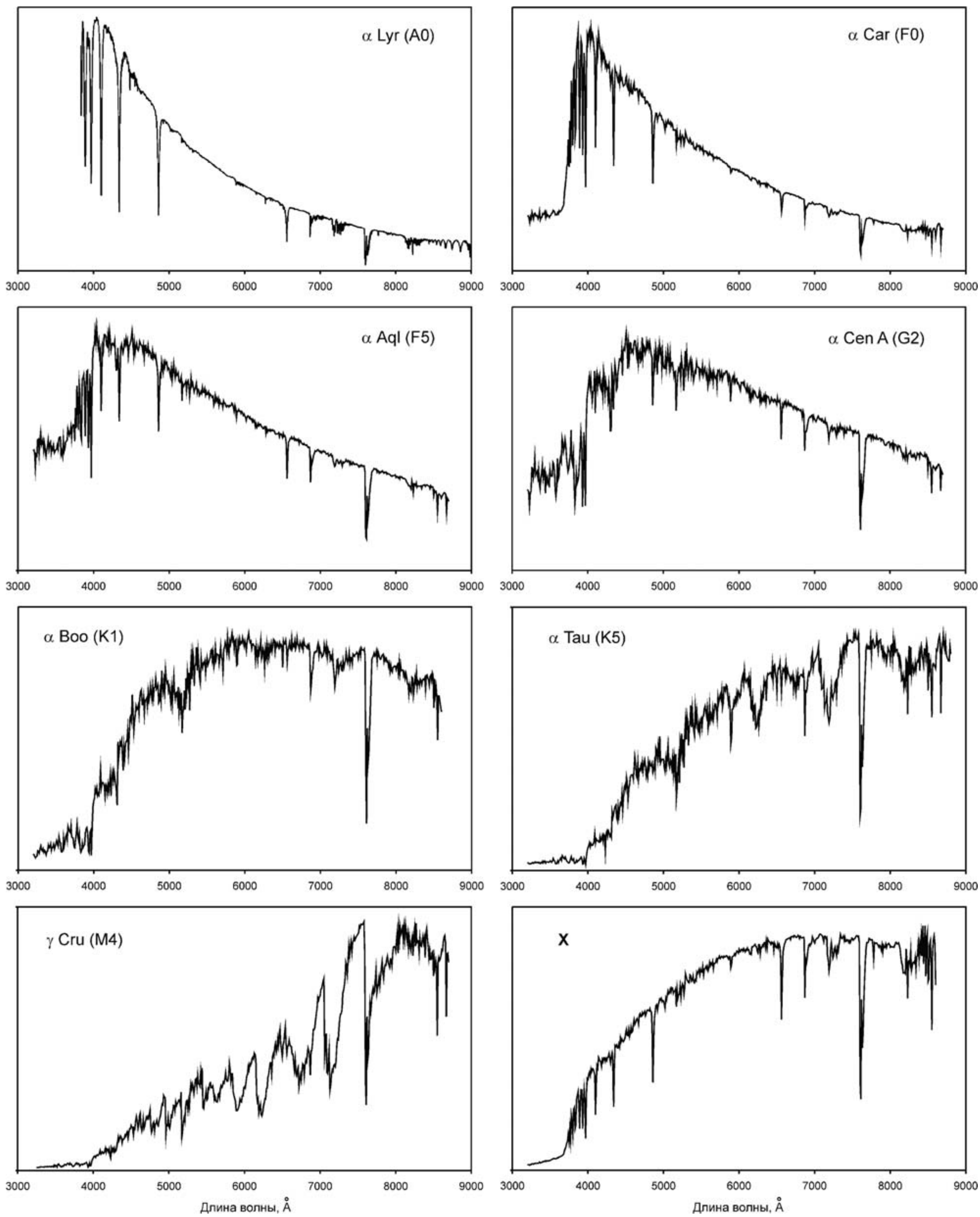
Полная формула для рефракции в зависимости от температуры и давления имеет вид:

$$r\,(P,T) = (38.5' - 0.45' T(^\circ\,\mathrm{C}))\frac{P}{760\,\text{мм рт.ст.}}.$$

XI. 2 ЗВЕЗДНЫЕ СПЕКТРЫ

О.С. Угольников

? Перед Вами спектры семи близких звезд некоторых спектральных классов от А0 до М4 (указаны в скобках), а также спектр еще одной звезды X в диске Галактики. Определите по нему расстояние до звезды X и ее спектральный класс, если известно, что он лежит в том же интервале от А0 до М4. Все спектры получены с Земли с одинаковым спектральным разрешением и высотой звезд над горизонтом. Лучевые скорости всех звезд малы. Масштабы графиков по ординате отличаются. Межзвездное поглощение света в диске Галактики составляет $(0.002^m/\text{пк})\cdot(\lambda/5500\,\text{Å})^{-1.3}$.



! По своей общей форме спектр звезды **X** напоминает спектры звезд класса K (Арктура и Альдебарана), однако некоторые линии (характерные острые минимумы) у спектра звезды **X** совершенно другие. По условию задачи, спектры получены с Земли при одинаковой высоте звезд над горизонтом. Поэтому у всех звезд должны наблюдаться теллурические линии, относительная глубина которых не будет зависеть от звезды и никак не связана с ее спектральным классом.

Характерный пример такой линии (точнее, сложной системы линий) – поглощение молекулярным кислородом O_2 вблизи 7600 ангстрем.

Спектральный класс звезды нужно определять по линиям, которые должны принадлежать самим звездам. Причем эти линии должны соответствовать распространенным химическим элементам, в противном случае их интенсивность будет существенно зависеть от содержания того или иного элемента, которое может сильно изменяться от звезды к звезде. В нашем случае за основу нужно брать линии бальмеровской серии водорода, которые видны в спектрах звезд. Их интенсивность существенно зависит от температуры, тем самым облегчая определение спектрального класса звезды **X**.

Выберем линии H_α (6563 ангстрема) и H_β (4861 ангстрем) и отметим их на спектрах. Мы видим, что эти линии сильны у звезд классов A и F, слабее у звезд класса G, уже с трудом заметны у звезд класса K и вовсе отсутствуют у звезды класса M. Связано это с тем, что для своего образования линии бальмеровской серии требуют наличия возбужденных атомов водорода с электроном на втором уровне, а при низких температурах таких атомов практически нет (отметим, что у горячих звезд классов O и B линии бальмеровской серии тоже слабеют, но уже из-за ионизации водорода).

Так как спектры звезд имеют одинаковое разрешение, мы можем примерно оценить интенсивность линии по величине максимального ослабления энергетического потока от звезды (в процентах). Отметим эти величины на графиках. Сделав то же самое для звезды **X**, мы видим, что по этой характеристике она похожа на звезду Канопус (α Киля, спектральный класс F0). В этом мы можем убедиться и по другим звездным спектральным линиям. Таким образом, мы определили спектральный класс звезды **X**.

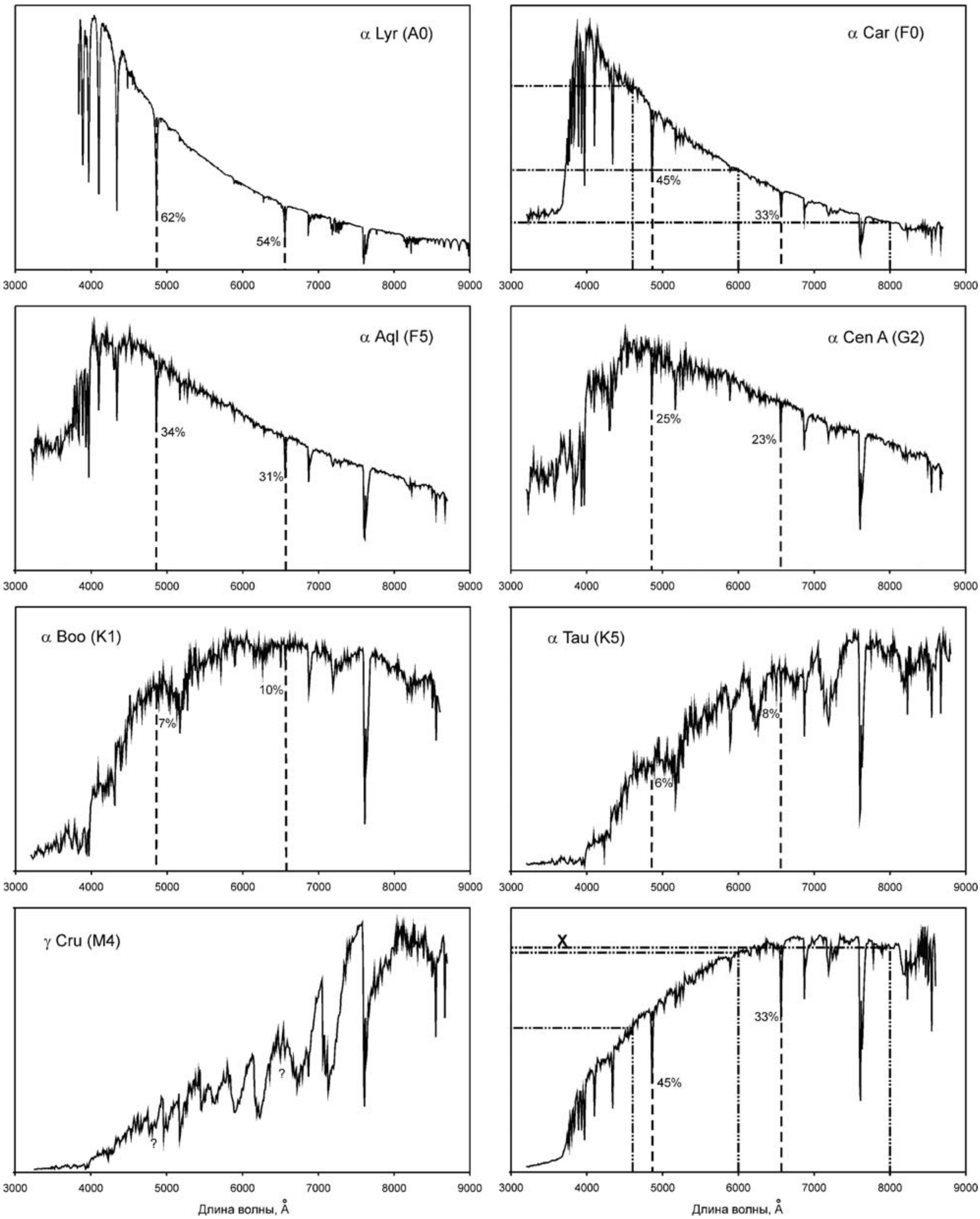
Общий вид спектра звезды **X** не похож на спектр Канопуса, так как он искажен межзвездным поглощением. Коротковолновое излучение поглощается сильнее, что вызывает общее "покраснение" звезды. Чтобы определить его и найти расстояние, вычислим значения спектрального энергетического потока J от Канопуса и звезды **X** на трех длинах волн, не содержащих сильных линий:

Длина волны, λ	J_1 (α Car)	J_2 (X)	$-2.5 \lg (J_2/J_1)$	$(\lambda/5500\ \text{Å})^{-1.3}$
4600	0.69	0.55	+0.25	1.261
6000	0.38	0.83	–0.85	0.893
8000	0.18	0.85	–1.69	0.614

За единицу в обоих случаях принят вертикальный масштаб соответствующего графика, очевидно, эти масштабы разные для разных звезд. Если бы поглощения не было, отсчеты J_2 и J_1 были бы пропорциональны друг другу. В действительности мы получаем:

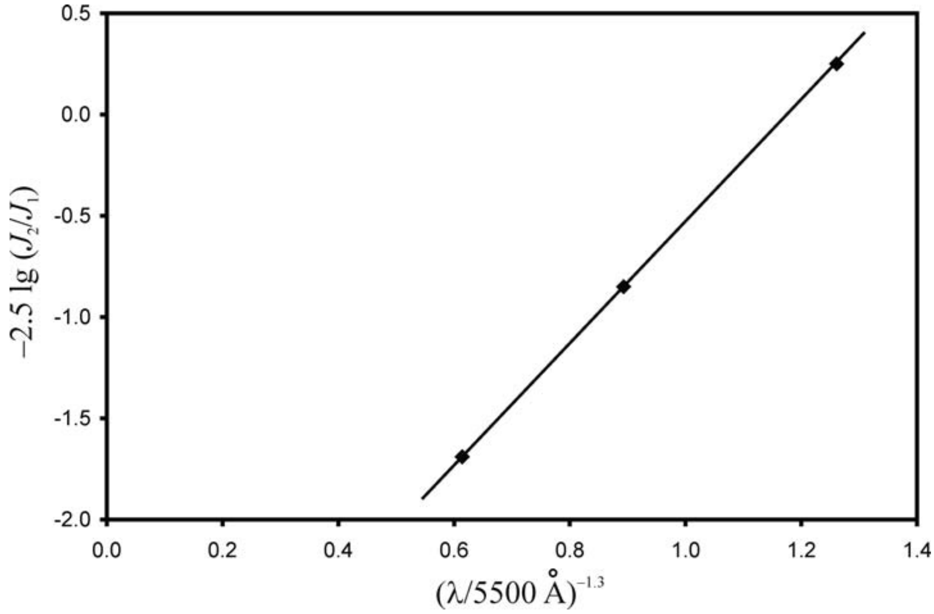
$$J_2 = C \cdot J_1 \cdot 10^{-0.4E(\lambda)}; \quad E(\lambda) = 0.002 \cdot D \cdot \left(\frac{\lambda}{5500\ \text{Å}} \right)^{-1.3}.$$

Здесь C – коэффициент пропорциональности, связанный с разной яркостью звезд, D – расстояние до звезды **X**. Логарифмируя эту формулу, имеем:



$$-2.5\lg\frac{J_2}{J_1} = -2.5\lg C + 0.002\cdot D\cdot\left(\frac{\lambda}{5500\ \text{Å}}\right)^{-1.3}.$$

Величины $(-2.5\ \lg\,(J_2/J_1))$ и $(\lambda/5500\ \text{Å})^{-1.3}$ должны быть пропорциональны друг другу со сдвигом соответствующей прямой за счет наличия коэффициента C. В этом можно убедиться, построив соответствующий график:



Угловой коэффициент прямой равен

$$K = \frac{2.5\lg\frac{J_2}{J_1}(\lambda_A) - 2.5\lg\frac{J_2}{J_1}(\lambda_B)}{\left(\frac{\lambda_B}{5500\ \text{Å}}\right)^{-1.3} - \left(\frac{\lambda_A}{5500\ \text{Å}}\right)^{-1.3}} \approx 3.$$

В качестве длин волн λ_A и λ_B можно использовать любые две длины волны из охваченного спектрального диапазона вдали от сильных линий. Расстояние до звезды **X** составляет

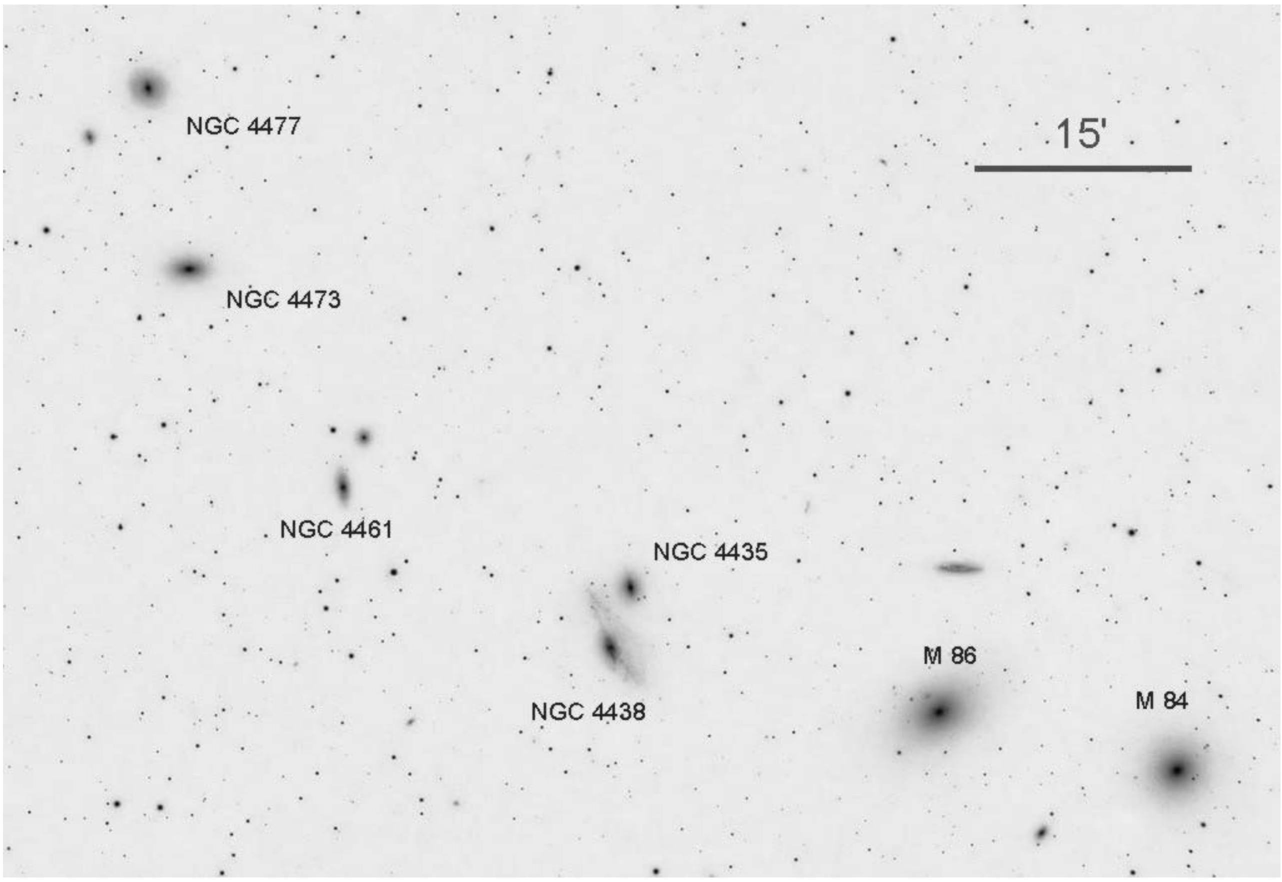
$$D = \frac{K}{0.002} = 1500\ \text{пк}.$$

XI. 3 ЦЕПОЧКА МАРКАРЯНА

Н.Н. Шахворостова

? **Перед Вами фотография галактик, входящих в известную «цепочку Маркаряна» – часть скопления галактик в созвездии Девы (негатив). Галактики удалены на 16 Мпк от Земли. В таблице приведены значения лучевой скорости и видимой звездной величины каждой из этих галактик. В предположении, что «цепочка Маркаряна» является гравитационно-связанной системой, оцените массовый вклад темной материи в этой системе. Считать, что светимость галактик равна 1/10 светимости Солнца на солнечную единицу звездной массы. Межзвездным поглощением света пренебречь.**

! Будем считать систему гравитационно-связанной, если ее полная энергия отрицательна. Это не значит, что система останется такой вечно и не потеряет ни одного своего члена, но в этом случае она не сможет распасться полностью.



Чтобы найти величину энергии, нужны данные о массах и скоростях в этой системе. Из наблюдений мы знаем яркости галактик, пропорциональные их массе, и одну компоненту скорости каждой из них. Введем значение яркости галактики, определяемое ее звездной величиной:

Галактика	v_R, км/с	m
NGC 4374 (M84)	1060	9.2
NGC 4406 (M86)	–244	8.9
NGC 4435	801	10.8
NGC 4438	71	10.0
NGC 4461	1931	11.1
NGC 4473	2244	10.2
NGC 4477	1355	10.4

$$J_i = CM_i = 10^{-0.4m_i}$$

Здесь m_i – видимая звездная величина галактики с номером i, M_i – ее видимая (звездная) масса, C – некоторая постоянная. Определим лучевую скорость центра видимой массы всей "цепочки Маркаряна":

$$V_0 = \frac{\sum_i M_i v_i}{\sum_i M_i} = \frac{\sum_i J_i v_i}{\sum_i J_i} = +670 \text{ км/с}.$$

Каждая из галактик движется вдоль луча зрения относительно центра масс со скоростью $v_i – V_0$. Среднеквадратичная собственная лучевая скорость галактик составляет

$$\bar{v}_1 = \sqrt{\frac{\sum_i M_i (v_i - V_0)^2}{\sum_i M_i}} = \sqrt{\frac{\sum_i J_i (v_i - V_0)^2}{\sum_i J_i}}.$$

В действительности, галактики движутся вдоль трех направлений, квадраты компонент скорости складываются друг с другом. Будем считать вклад в энергию от движения по всем трем осям одинаковым. Тогда среднеквадратичная собственная скорость галактик равна

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3\sum_i M_i (v_i - V_0)^2}{\sum_i M_i}} = \sqrt{\frac{3\sum_i J_i (v_i - V_0)^2}{\sum_i J_i}} = 1500 \text{ км/с}.$$

Для простоты решения мы вполне могли считать массы галактик одинаковыми. В этом случае мы бы получили несколько иное значение средней лучевой скорости (+1000 км/с), но практически такую же среднеквадратичную скорость (1500 км/с).

Заметим, что скрытая масса, входящая в "цепочку Маркаряна", взаимодействует с видимой массой и также движется, и для нее мы предполагаем ту же характерную среднеквадратичную скорость. Чтобы система с такими скоростями была связанной, модуль потенциальной энергии должен превосходить кинетическую энергию. Обозначим характерный радиус системы как R. Тогда

$$\frac{GM^2}{2R} > \frac{M\bar{v}^2}{2}; \quad M > \frac{\bar{v}^2 R}{G}.$$

Радиус системы нам известен, так как он виден под углом 40′ с расстояния 16 Мпк. Он равен 200 кпк, и это означает, что полная масса системы не меньше $2 \cdot 10^{44}$ кг или 10^{14} масс Солнца.

Определим теперь массу видимого вещества в "цепочке Маркаряна". Вычисляя суммарную видимую звездную величину всех галактик, получаем 7.7^m. Пренебрегая межзвездным поглощением (как в галактиках цепочки, так и в нашей Галактике), получаем абсолютную звездную величину системы:

$$m_A = m + 5 - 5 \lg D = -23.3.$$

Здесь D – расстояние до системы. Абсолютная звездная величина системы на 28^m меньше, чем у Солнца. Следовательно, светимость "цепочки Маркаряна" равна $10^{0.4 \cdot 28}$ или 160 миллиардам светимостей Солнца. По условию задачи, одна солнечная светимость в галактиках создается звездной массой в 10 масс Солнца. В итоге, суммарная видимая масса системы M_V равна $1.6 \cdot 10^{12}$ масс Солнца. Предположение о гравитационной связанности системы ведет к величине вклада темного вещества:

$$\mu_D = \frac{M - M_V}{M} = 0.984.$$

Это очень большая величина. По-видимому, цепочка Маркаряна не является гравитационно-связанной системой. К подобному выводу пришел сам В.Е. Маркарян в своей работе 1961 года.