Условие

Цепной линией называют кривую, образуемую подвешенной за концы однородной массивной нитью. Пусть погонная плотность нити (масса единицы длины нити) μ, а её натяжение в нижней точке T_0. Величина $\lambda = T_0/\mu g$ является параметром, определяющим форму цепной линии. Если начало координат поместить в низшей точке цепной линии, то её можно задать уравнением:

$$y = \lambda\left[\frac{1}{2}\left(e^{x/\lambda} + e^{-x/\lambda}\right) - 1\right].$$

От Вас не требуется вывод зависимости вертикальной координаты y точки нити от горизонтальной координаты x. Вам следует разобраться в связи y и s, где s — длина отрезка нити, отсчитываемая от низшей точки. Теоретическую зависимость Вы должны проверить, проведя измерения с цепочкой из скрепок.

Теоретическая часть:

1. Пусть натяжение нити в нижней точке равно T_0. Для малого отрезка нити длиной Δs получите выражение для разницы сил натяжения ΔT на его концах, выразив его через μ, и разность высот Δy концов отрезка.
2. Получите выражение для натяжения T нити на высоте y относительно нижней точки при заданном T_0?
3. Докажите, что если верхняя точка нити длины s возвышается над низшей точкой на высоту y (рис. 6), то

$$\lambda = \frac{T_0}{\mu g} = \frac{s^2 - y^2}{2y}.$$

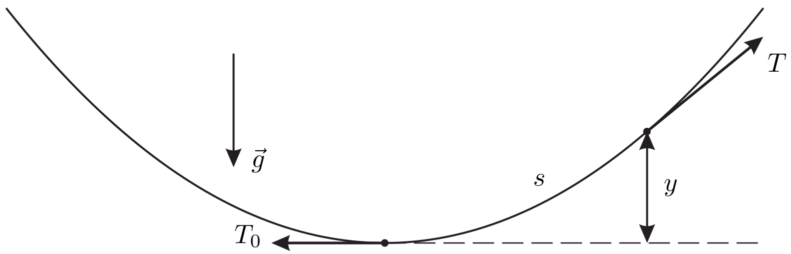

Рис. 6

Экспериментальная часть:

4. Соберите из выданных вам скрепок цепочку. Подвесьте склеенный лист бумаги и цепочку на бруске так, чтобы максимальный провис H составлял $(0{,}3 \div 0{,}5)L$, где L — расстояние между точками подвеса цепочки. Укажите выбранное вами значение H/L, число скрепок n и длину l скрепки (расстояние между точками соприкосновения её с соседними скрепками).

5. Отметьте фломастером на листе бумаги положения последовательных точек соприкосновения скрепок, начав с низшей точки (считайте её нулевой). Определите высоты этих точек, и результаты измерений занесите в таблицу.
6. Для *каждой* точки рассчитайте по измеренным высотам y_i и номеру n_i значения параметра λ.
7. Укажите номера скрепок, для которых проявляется заметное отличие реальной цепочки от идеальной (заметное отличие параметра λ от его среднего значения).
8. Вычислите среднее значение λ.
9. Вычислите среднее отклонение от среднего значения λ.
10. Найдите отношение натяжения в нижней точке к весу одной скрепки:

$$\tau = \frac{T_0}{mg}.$$

Указание: на выданном вам листе отметьте и пронумеруйте точки сцепления скрепок, подпишите рядом их высоты, а результаты измерений и их обработки представьте в таблице. Лист подпишите. По окончании тура вложите его в тетрадь с отчетом о проделанной работе и сдайте вместе с нею.

Оборудование. 30–40 скрепок, лист бумаги формата А2, пенополиуретановый плинтус или деревянный брусок длиной 70–100 см (для крепления бумаги и цепочки: он кладётся на край стола, а цепочка и бумага свисают ниже столешницы), фломастер, 4 «силовые» металлопластиковые кнопки, линейка длиной 40 см.

Примерные критерии оценивания

Пункт 1 задания 2
Пункт 2 задания 1
Пункт 3 задания 1
Указано H/L, число скрепок n 1
Длина l измерена с точностью хотя бы 0,1 мм 1
Наличие 15 или более отмеченных точек с указанием высот и номера (не обязательно подряд) 1
Выведена формулы для λ через n_i и l_i 1
Наличие таблицы с данными и обработкой не менее 15 точек 2
Указано, для каких скрепок имеется заметное отклонение от теоретического значения 1
Попадание в ворота для среднего значения λ 2
Попадание в ворота по $(\Delta\lambda)_{ср}$ 1
Найдено $\tau = T_0/mg = \lambda_{ср}/l$ 1

Возможное решение

1. Для малого отрезка нити длиной Δs с углом наклона α к горизонтали разница сил натяжения на концах $\Delta\vec{T} = -\mu\vec{g}\Delta s$, а изменение величины силы натяжения равно проекции вектора $\Delta\vec{T}$ на направление вектора $\vec{T}$:

$$\Delta T = |\Delta\vec{T}|\sin\alpha = \mu g\Delta s\sin\alpha = \mu g\Delta y.$$

2. На высоте y натяжение нити $T = T_0 + \mu gy$.
3. Рассмотрим отрезок нити от нижней нулевой точки до точки, находящейся на высоте y при длине отрезка s. Пусть T натяжение в этой точке, а T_x и T_y его проекции на горизонталь и вертикаль. Запишем условие равновесия нити в проекциях на горизонталь и вертикаль: $T_x = T_0$ и $T_y = \mu gs$. Отсюда

$$T^2 = T_0^2 + (\mu gs)^2. \tag{3}$$

После подстановки $T = T_0 + \mu gy$ в уравнение (3) находим

$$\lambda = \frac{T_0}{\mu g} = \frac{s^2 - y^2}{2y}.$$

4. Отметим H/L, число скрепок n. Для повышения точности длину одной скрепки l измеряем по длине натянутого отрезка цепочки из 30–40 скрепок.
5. Если цепочка скрепок подвешена на небольшом расстоянии от миллиметровой бумаги, то положение точек соприкосновения можно отметить с точностью 0,5–1 мм.
6. Рассчитываем λ по формуле:

$$\lambda = \frac{(n_i l)^2 - y_i^2}{2y_i}.$$

Результаты эксперимента приведены в таблице.

Таблица 2: результаты измерений.

№	y (мм)	λ (мм)	$\Delta\lambda$ (мм)
1	8	39	
2	11	119	
3	18	161	4
4	31	160	5
5	45	166	1
6	60	175	10
7	79	172	7
8	99	171	6
9	120	170	5
10	143	168	3
11	163	172	7
12	185	172	7
13	207	175	10
14	231	167	2
15	256	172	7
16	280	167	2
17	304	172	7
18	330	170	5
19	355	149	16
20	369	156	9

$H/L = 370/660 = 0{,}56$,
$n = 42$ скрепки,
$l = 25{,}9$ мм,
$\lambda_{\text{ср}} = 165$ мм, $(\Delta\lambda)_{\text{ср}} = 6$ мм.
$\tau_{\text{ср}} = 6{,}33$, $\varepsilon_\tau = 4\%$.
Для первых двух нижних скрепок заметное отличие λ от теоретического значения. Эти значения λ исключены из определения среднего. Разброс для λ сопоставим с тем, что следует из погрешности измерения y (2%) и «сдвига» на 1 и 2 скрепки.
Вывод: цепочка скрепок в целом адекватно моделирует цепную линию, за исключением ближней окрестности нижней точки

Условие

Необходимые сведения

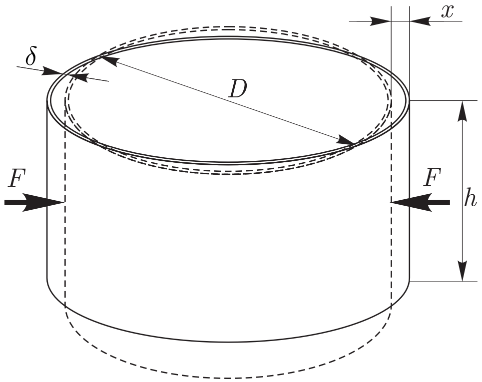

Рис. 1

Скорость звука в твёрдом теле можно рассчитать по формуле $c = \sqrt{E/\rho}$, где E — модуль Юнга, ρ — плотность вещества. Модуль Юнга характеризует упругие свойства вещества, определяя жесткость различных систем и конструкций. Например, относительная деформация ε стержня сечением S под действием растягивающей (или сжимающей) силы F равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{SE}.$$

Эту формулу можно принять в качестве определения модуля Юнга.

Относительное изменение диаметра D кольца шириной h и толщиной стенки δ под действием двух сосредоточенных сил F, действующих вдоль диаметра (рис. 1), при небольших деформациях x можно найти по формуле:

$$\varepsilon = \frac{x}{D} = \beta F^m E^n D^p h^q \delta^i, \qquad (1)$$

где m, n, p, q, i — некоторые целые числа, а β — безразмерный коэффициент.

Задание

1. Руководствуясь соображениями размерностей, известными физическими законами и проведя необходимые измерения, определите показатели степеней m, n, p, q, i в законе деформации кольца (1). Запишите полученный закон деформации кольца.
2. По известной скорости звука $c_0 = 5240$ м/с в алюминии (плотность $\rho_{\text{Al}} = 2{,}70$ г/см^3) определите скорость звука c в полиэтилентерефталате ($\rho_{\text{ПЭТ}} = 1{,}39$ г/см^3).

Оборудование. Тонкостенное алюминиевое кольцо известной массы (указана на внутренней стороне кольца), два тонкостенных кольца из полиэтилентерефталата (ПЭТ) одинаковой ширины и разных диаметров (масса колец также указана на их внутренней стороне), нить, линейка, миллиметровая бумага, скотч и ножницы (по требованию).

Примерные критерии оценивания

Обоснован и получен результат $m = 1$ 1

Обоснован и получен результат $q = -1$ 1
Обоснован и получен результат $n = -1$ 1
Получено уравнение (2) 1
Указан способ деформирования колец одинаковой силой 2
Приведены измерения длин окружности L_1 и L_2 1
Указано, что толщина колец $\delta = m/(\rho L h)$ 1
Приведены измерения деформаций x_1 и x_2 при одинаковой силе 1
Получен результат $p = 2$ 1
Найдено значение числа $i = -3$ 1
Записан закон деформации кольца (3) 1
Указаны способ нахождения скорости звука в ПЭТ (например формула (4)) 1
Приведены результаты измерений деформаций колец из разных материалов 1
Получен ответ для скорости звука c с точностью 20% 1

Возможное решение

1. **Закон деформации колец.** Проанализируем уравнение (1). По закону Гука малые деформации пропорциональны силе: $\varepsilon \sim F$, поэтому $m = 1$.

Увеличение ширины кольца в два раза (при прочих равных параметрах кольца) можно представить как два кольца, расположенных рядом. Следовательно, для сохранения относительной деформации потребуется в два раза большая сила. Учитывая, что $m = 1$ получаем $\varepsilon \sim \dfrac{F}{h}$, $q = -1$.

Размерность модуля Юнга $[E] = \text{Н}/\text{м}^2 = \text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$. Для исключения размерности массы и времени (которые присутствуют в силе F и модуле Юнга E) следует считать, что $\varepsilon \sim \dfrac{F}{E}$, поэтому $n = -1$.

Поскольку ε – безразмерная величина, должно выполняться равенство:

$$m - n + p + q + i = 0. \tag{2}$$

С учётом найденных ранее коэффициентов получим:

$$p + i = -1.$$

Для определения показателя степени p проведём эксперимент с двумя кольцами из ПЭТ. Измерим ширину h и длину окружности $L = \pi D$ полиэтилентерефталатовых колец. Зная массу m и плотность ρ этих материалов, вычислим толщину колец $\delta = m/(\rho L h)$. Получим, что $\delta_2 \approx \delta_1$.

Сложим кольца в виде «восьмёрки» и стянем их ниткой. Деформирующая сила для обоих колец будет одинакова. Измеряем абсолютные деформации диаметров колец x_1, x_2 в этом случае.

По условию, ширина колец h одинакова, поэтому для нахождения p используем уравнение:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^p = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^p.$$

В нашем случае получилось уравнение $1{,}5^p = 2{,}3$. Его корнем является число $p \approx 2{,}05$. Так как по условию p – целое число, то примем $p = 2$.

Показатель степени i находим из уравнения: $i = -p - 1 = -3$.

Закон деформации кольца имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{x}{D} = \beta\frac{FD^2}{Eh\delta^3}. \tag{3}$$

Для справки, точная формула имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{x}{D} = \left(\frac{3\pi^2 - 24}{8\pi}\right)\frac{FD^2}{Eh\delta^3}.$$

(Ландау, Лифшиц, т. VII, Теория упругости).

2. **Скорость звука.** Деформацию кольца x выражаем через скорость звука c и массу кольца m:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{D^2}{\delta}\sqrt{\frac{\pi\beta F}{mx}}$$

Если кольца деформировать одной и той же силой, то для отношения скоростей звука получаем:

$$c = c_0\left(\frac{D}{D_0}\right)^2\left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)\sqrt{\frac{m_0 x_0}{mx}}. \tag{4}$$

Деформируем кольца одинаковой силой (для этого достаточно расположить их в виде восьмёрки и стянуть одной и той же нитью). Измеряем их деформации (x — для кольца из полиэтилентерефталата и x_0 — для кольца из алюминия. По полученным данным находим скорость звука в полиэтилентерефталате: $c = 1450$ м/с.