11 класс

Задача 1. Два блока

Угол α_0, соответствующий положению равновесия, определяется из уравнения:

$$Mg\sin\alpha_0 = mg. \tag{8}$$

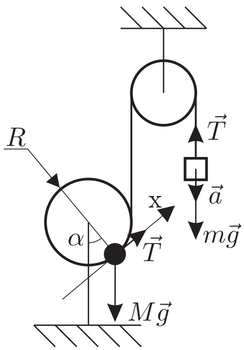

Рис. 17

По второму закону Ньютона для груза m (рис. 17):

$$ma = mg - T. \tag{9}$$

По второму закону Ньютона для точечной массы M в проекции на ось Ox:

$$Ma = T - Mg\sin\alpha. \tag{10}$$

Так как нить нерастяжимая, то значения ускорений точечной массы M и груза m совпадают.

Исключая T из уравнений (9) и (10), получим:

$$(M+m)a = mg - Mg\sin\alpha. \tag{11}$$

Масса M закреплена на краю блока, поэтому выполняется соотношение:

$$a = R\ddot{\alpha}\,.$$

Угол α представим в виде:

$$\alpha = \alpha_0 + \beta, \quad \beta \ll 1,$$

Тогда

$$\sin\alpha = \sin\alpha_0\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha_0 \approx \sin\alpha_0 + \cos\alpha_0\cdot\beta. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), получим:

$$(M+m)R\,\ddot{\alpha} = -Mg\cos\alpha_0\cdot\beta.$$

Учитывая, что $\ddot{\alpha} = \ddot{\beta}$, получаем уравнение гармоническх колебаний:

$$\ddot{\beta} + \omega^2\beta = 0,$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{Mg\cos\alpha_0}{(M+m)R}}$. Выразим $\cos\alpha_0$ из (8). Окончательно получаем:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\cdot\left(\frac{M+m}{M-m}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Критерии оценивания

Записано условие равновесия (8) 2
Указано на равенство ускорений грузов 1
Записано уравнение движения (11) 2
Установлена связь линейного и углового ускорений 1
Выполнено разложение (12) по малому параметру 2
Получен окончательный ответ 2

Задача 2. Треугольный цикл

Первый способ решения: Теплоёмкость в точке K равна нулю, поэтому адиабата является касательной к прямой AB в точке K. Уравнение адиабаты:

$$pV^\gamma = \text{const}\,.$$

Продифференцируем по объёму V:

$$p'_V V^\gamma + \gamma p V^{\gamma-1} = 0.$$

Угловой коэффициент прямой AB равен:

$$k = p'_V = -\frac{C_p}{C_V}\frac{p_K}{V_K} = -\gamma\frac{p_K}{V_K}.$$

Второй способ решения: Рассмотрим процесс, описываемый прямой, проходящей через точку K. При небольшом изменении объёма ΔV газ получит теплоту:

$$Q = \Delta U + p_K\Delta V.$$

Используя уравнение состояния идеального газа, свяжем изменение температуры ΔT с изменениями давления Δp и объёма ΔV:

$$p_K\Delta V + V_K\Delta p = \nu R\Delta T.$$

Отсюда получим выражение для теплоты:

$$Q = (C_p/R)p_K\Delta V + (C_V/R)V_K\Delta p,$$

которая равна нулю, так как теплоёмкость остаётся равной нулю в течение всего малого процесса. Прямая AB, проходящая через K, имеет наклон:

$$k = \frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{C_p}{C_V}\frac{p_K}{V_K} = -\gamma\frac{p_K}{V_K},$$

для многоатомного газа $\gamma = 4/3$.

Общая часть:

Уравнение прямой AB:

$$p = p_K - \gamma\frac{p_K}{V_K}(V - V_K).$$

Удобно построить эту прямую, найдя значение объёма V_1 при нулевом давлении:

$$V_1 = 7V_K/4.$$

Из точки K построим перпендикуляр KE к оси V. Точке E соответствует значение объёма V_K. Разделив отрезок OE пополам, и его левую часть ещё пополам, найдем отрезок DE равный $3V_K/4$ (рис. 18). На оси V от точки E отложим отрезок EF, равный DE. По построению OF $= V_1$. Проведём прямую через F и K, на которой находятся точки A и B. Треугольник ACB прямоугольный, поэтому CK=CB=CA. Проведём окружность радиуса CK с центром в точке K. Точки A и B лежат на прямой KF.

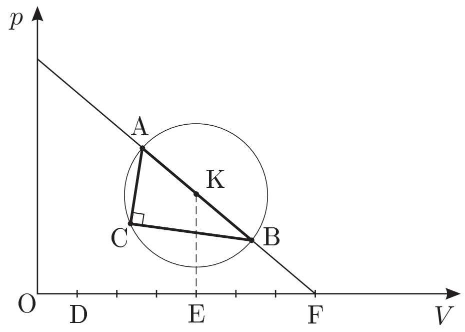

Рис. 18

Критерии оценивания

Первый способ:

Указано, что адиабата касается прямой AB 2
Найден угловой коэффициент наклона k 3

Второй способ:

Записано первое начало термодинамики 1
Приведена связь изменений температуры, давления, объёма 2
Найден угловой коэффициент наклона k 2

Общая часть:

Учтено, что для многоатомного газа $C_V = 3R$ ($\gamma = 4/3$) 1
Записано уравнение прямой AB 1
Приведено построение прямой AB 2
Найдены точки A и B 1

Задача 3. Перевороты

Исходное количество воздуха в цилиндре

$$\nu_0 = \frac{p_0 S h_0}{RT}.$$

Уравнение состояния идеального газа, расположенного над поршнем после n переворотов:

$$p_0 S h_n = \nu_n RT, \tag{13}$$

где h_n — расстояние от верхнего торца до поршня после n-го переворота, ν_n — количество газа.

После $n + 1$ переворота это же количество воздуха окажется внизу под поршнем:

$$(p_0 + \Delta p)S(h_0 - h_{n+1}) = \nu_n RT, \tag{14}$$

где $\Delta p = \dfrac{mg}{S}$.

Разделив (14) на (13), получим

$$(p_0 + \Delta p)(h_0 - h_{n+1}) = p_0 h_n.$$

Отсюда выражаем h_{n+1} через h_n:

$$h_{n+1} = h_0 - \frac{p_0}{p_0 + \Delta p} h_n. \tag{15}$$

Ответим на первый вопрос. После первого переворота количество воздуха под поршнем будет равно ν_0. Найдём h_1 из (15), положив $n = 0$.

$$h_1 = h_0 \frac{\Delta p}{p_0 + \Delta p}.$$

Количество воздуха над поршнем

$$\nu_1 = \frac{p_0 S h_1}{RT}.$$

При этом количество воздуха в цилиндре будет равно

$$\nu_{0,1} = \nu_0 + \nu_1 = \nu_0 \frac{p_0 + 2\Delta p}{p_0 + \Delta p}.$$

Это количество будет максимальным, так как под поршнем воздуха ν_0, и при последующих переворотах его всегда будет меньше. А над поршнем давление воздуха p_0, и, следовательно, максимальное количество воздуха в цилиндре равно $\nu_{0,1}$.

После большего количества переворотов $h_{n+1} = h_n$, отсюда получаем:

$$h = \frac{p_0 + \Delta p}{2p_0 + \Delta p} h_0.$$

Количество воздуха в цилиндре будет равно

$$\nu = \nu_0 \frac{2(p_0 S + mg)}{2p_0 S + mg}.$$

Примечание. На рисунке 19 приведена качественная диаграмма, показывающая, как изменяется количество воздуха в цилиндре в зависимости от n.

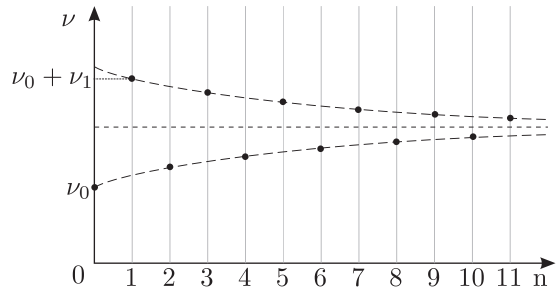

Рис. 19

От участников олимпиады решение рекуррентного уравнения (3) или уравнения $\nu_{n+1} = f(\nu_n)$ не требуется.

Критерии оценивания

Указано, что после первого переворота в цилиндре будет максимальное количество воздуха 1

Приведена формула для максимального количества воздуха 1

Записано уравнение состояния для воздуха над поршнем после n-го переворота 1

Записано уравнение состояния для воздуха под поршнем после $n+1$-го переворота 1

Получено реккурентное соотношение для h_{n+1} и h_n 2

Сделан предельный переход для n стремящегося к бесконечности 2

Дан ответ на второй вопрос 2

Задача 4. Барьер Шоттки

Известно, что тонкий заряженный слой с поверхностной плотностью заряда σ создаёт в непосредственной близости от себя однородное электрическое поле с напряженностью

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Отсюда, напряженность поля E в точке с координатой x равна (рис. 20):

$$E(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -\dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{x}{D}\right), & 0 \leqslant x \leqslant D, \\ 0, & x > D. \end{cases}$$

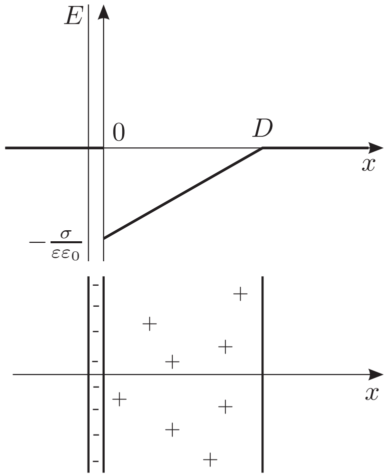

Рис. 20

В знаменателе отсутсвует множитель 2 в том случае, если всё поле сосредоточено с одной стороны от заряженного слоя.

Видно, что напряженность электрического поля E в области объёмного заряда является линейной функцией от координаты x. На расстоянии от $x = 0$ до $x = D$ возникает разность потенциалов, которая может быть вычислена как площадь под графиком зависимости $E(x)$. В нашем случае получаем:

$$U_k = \frac{\sigma D}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{eN_d D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Откуда окончательно получаем

$$D = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 U_k}{eN_d}} = 0{,}32 \text{ мкм}.$$

Критерии оценивания

Показано, что в области нейтрального полупроводника напряженность поля $E = 0$ 1

Записан закон сохранения заряда $\sigma = eN_d D$ 1

В области ионизированных доноров найдена зависимость $E(x)$ 3

Найдено U_k как площадь под графиком $E(x)$ или интегрированием 2

Получено выражение для D 2

Приведен числовой ответ 1

Задача 5. Электрическая цепь с ключём

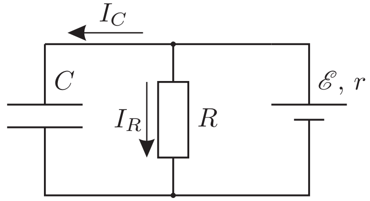

Рис. 21

Перед размыканием ключа для контура из источника и резистора (рис. 21) верно равенство:

$$\mathscr{E} = (I_C + I_R)r + I_R R.$$

Учитывая, что $r = R/2$, получим:

$$\mathscr{E} = I_C\frac{R}{2} + \frac{3}{2}I_R R.$$

Выразим ток I_C через напряжение $U_C = I_R R$ на конденсаторе:

$$I_C = \frac{2}{R}(\mathscr{E} - \frac{3}{2}U_C).$$

После размыкания ключа напряжение на конденсаторе не меняется:

$$U_C = 2I_C R = 4(\mathscr{E} - \frac{3}{2}U_C),$$

отсюда выражаем:

$$U_C = \frac{4}{7}\mathscr{E} = 40 \text{ В}.$$

Энергия, запасённая в конденсаторе, перейдет в теплоту:

$$Q = \frac{CU_C^2}{2} = 0{,}1 \text{ Дж}.$$

Критерии оценивания

Записаны правила Кирхгофа для схемы до размыкания 2

Выражен ток I_C через конденсатор 2

Указано, что напряжение (заряд) на конденсаторе не меняется 2

Получено уравнение, связывающее $\mathscr{E}$ и U_C 2

Получен ответ 2