10 класс

Задача 1. Цилиндр в мерном стакане

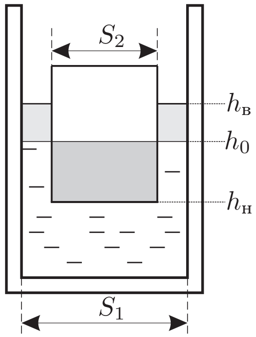

Рис. 14

Пусть h_0 — начальный уровень воды в стакане (в единицах длины), $h_н$ — уровень нижнего торца цилиндра, $h_в$ — уровень воды в стакане. (Все уровни отсчитываются от дна стакана). (рис. 14)

Объём воды, вытесненной цилиндром из области ниже h_0, образовал водяную «шайбу» толщиной $(h_в - h_0)$ с внешним сечением S_1 и внутренним сечением S_2.

$$(h_0 - h_н)S_2 = (h_в - h_0)(S_1 - S_2). \tag{3}$$

Учитывая, что высоты $h_н$, h_0, $h_в$ связаны со значениями объемов, отсчитываемыми по шкале мерного стакана $V_н$, V_0, $V_в$ соотношениями $V_н = S_1 h_н$, $V_0 = S_1 h_0$, $V_в = S_1 h_в$, получаем из (3) зависимость $V_в(V_н)$ в виде:

$$V_в = \frac{S_1}{S_1 - S_2}V_0 - \frac{S_2}{S_1 - S_2}V_н. \tag{4}$$

График этой зависимости, постренный по данным эксперимента, представлен на рис. 15.

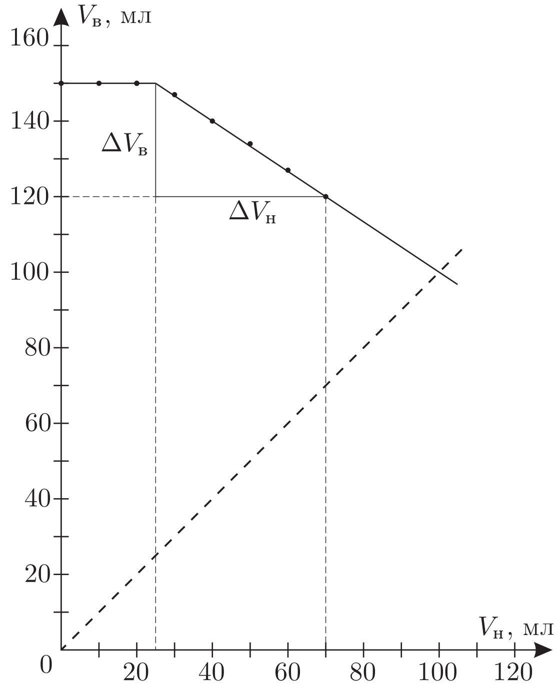

Рис. 15

Из графика видно, что при $V_в = 150$ мл уровень воды перестаёт изменяться. При этом уровне цилиндр полностью погрузился в воду. Этот момент наступил при $V_н = 25$ мл, то есть высоте цилиндра соответствует $L = 150 - 25 = 125$ ед. шкалы стакана. Из условия задачи следует, что в начальном состоянии, при свободном плавании цилиндра высоте его погруженной в воду части L_0 соответствует $V_{0в} - V_{0н} = 120 - 70 = 50$ ед. шкалы стакана. Отсюда находим плотность дерева:

$$\rho_д = \rho_в \frac{L_0}{L} = 400 \text{ кг/м}^3.$$

Из (4) следует, что угловой коэффициент наклона зависимости $V_в(V_н)$ равен:

$$\frac{\Delta V_в}{\Delta V_н} = -\frac{S_2}{S_1 - S_2} = -\frac{1}{\frac{S_1}{S_2} - 1} = -\frac{2}{3}.$$

Численное значение взято из графика. Следовательно, $\frac{S_1}{S_2} = 2{,}5$, и $\frac{D}{d} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = 1{,}58$.

Объём воды в стакане найдём из графика. Уровень V_0 установится в тот момент, когда стержень будет полностью вынут из воды. Из (4) видно, что при $V_н = V_0$, $V_в$ также становится равным V_0. Пунктирный график функции $V_в = V_н$ пересекает график зависимости в точке $V_0 = 100$ мл.

Критерии оценивания

Установлена аналитическая связь $V_в(V_н)$ 2
Найдена высота цилиндра 2
Найдена плотность дерева 2
Найдено отношение диаметров 2
Найден объём воды в стакане до погружения цилиндра 2

Задача 2. Цепная реакция

Заметим, что показания весов пропорциональны силе, с которой цепочка действует на чашу. По третьему закону Ньютона, такая же сила действует со стороны чаши на цепочку. Выведем зависимость силы реакции опоры от времени. Эта сила включает в себя две составляющие — динамическую (от тормозящих до полной остановки фрагментов цепочки) и статическую (от той части цепочки, которая уже лежит неподвижно на чаше весов). Зависимость скорости от времени $v = gt$, выпавшей длины от времени $h = \frac{gt^2}{2}$.

Статическая часть силы реакции

$$F_{ст} = \frac{m}{L}\frac{gt^2}{2}g = \frac{mg^2t^2}{2L}.$$

Для нахождения динамической составляющей рассмотрим изменение импульса малого фрагмента цепочки Δm, скорость которого уменьшается до нуля. Для него второй закон Ньютона в импульсной форме имеет вид:

$$(v - 0)\Delta m = F_{дин}\Delta t,$$

где $\Delta m = m\frac{v\Delta t}{L}$, откуда динамическая сила $F_{дин}$ равна:

$$F_{дин} = \frac{mv^2}{L} = \frac{mg^2t^2}{L}.$$

Полная сила $F = F_{ст} + F_{дин} = \frac{3mg^2t^2}{2L}$ является монотонно возрастающей функцией времени t. Заметим, что время падения цепочки $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$. К моменту времени t_1 сила реакции достигает максимального значения $F_{max} = 3mg$. После прекращения падения на чашу весов будет действовать только статическая сила, и весы покажут вес покоящейся цепочки, равный по модулю mg.

Из таблицы видно, что в третьем измерении вес цепочки уменьшился, это означает, что падение к этому моменту прекратилось и масса цепочки 100 г. Во втором и первом измерении на чашу упала не вся цепочка (показания весов меньше 300 г). Следовательно, падение длилось дольше 0,4 с, но не более 0,6 с. Сила реакции при втором измерении (можно и по первому измерению) равна удвоенной силе тяжести

$$2mg = \frac{3mg^2t_2^2}{2L},$$

откуда

$$L = \frac{3}{4}gt_2^2 = 1{,}2 \text{ м}, \quad t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}} = 0{,}49 \text{ с}.$$

Критерии оценивания

Упоминание о динамической составляющей реакции 1
Скорость падающей части цепочки 1
Вклад динамической состовляющей 1
Вес упавшей части цепочки 1
Формула для показания весов, как функция t 1
Обоснование того факта, что в момент времени $t = 0{,}6$ с вся цепочка находится на весах 1
Нахождение массы 1
Нахождение длины 2
Нахождение времени падения 1

Задача 3. Воздушный шарик

Начальный объём шарика

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 = 7{,}238 \text{ л} \approx 7{,}24 \text{ л}.$$

Масса воздуха в шарике

$$m = \frac{p_0 V_0 \mu}{RT} = 10{,}94 \text{ г}.$$

Полная масса шарика

$$M = M_{\text{об}} + m = 30{,}94 \text{ г} \approx 31 \text{ г}.$$

На критической глубине h сила Архимеда равна силе тяжести:

$$Mg = \rho g V,$$

давление $p = p_{\text{атм}} + \rho g h$.

Температура постоянная, поэтому выполняется равенство:

$$p_0 V_0 = (p_{\text{атм}} + \rho g h)V = (p_{\text{атм}} + \rho g h)\frac{M}{\rho} = Mgh + p_{\text{атм}}\frac{M}{\rho}.$$

Выражаем h:

$$h = \frac{p_0 V_0}{gM} - \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} = 2793 \text{ м} \approx 2800 \text{ м}.$$

Критерии оценивания

Найдена масса шарика M 2
Записан закон Архимеда 2
Записан закон Паскаля 2
Записан закон Менделеева-Клапейрона для двух состояний 2
Найдена глубина h 2

Задача 4. Тепловая пушка

При стационарном течении количество вещества ν, ежесекундно поступающего на вход, равно числу ежесекундно выходящего. Из уравнения состояния идеального газа имеем:

$$\nu = \frac{p_1 \pi D_1^2 v}{4RT_1} = \frac{p_2 \pi D_2^2 v}{4RT_2}.$$

Отсюда $T_2 = T_1 \dfrac{p_2 D_2^2}{p_1 D_1^2} = 356\ K$, $t_2 = 83°\text{C}$.

Работа тепловой пушки идет на увеличение внутренней энергии на $\Delta U = (5/2)R(T_2 - T_1)$, и на работу $A = R(T_2 - T_1)$ во входном и выходном сечении воздухопровода (в расчете на один моль). Кинетическая энегия воздуха остаётся неизменной. Поэтому мощность

$$N = \frac{7}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{7\pi v}{2\cdot 4}(p_2 D_2^2 - p_1 D_1^2) = 4{,}46 \text{ кВт}.$$

Критерии оценивания

Записано уравнение состояния идеального газа, связывающее ежесекундное количество вещества ν и скорость потока v 2
Найдена температура t_2 1
Указано, что работа пушки идет на увеличение внутренней энергии и совершение работы над газом 2
Записано выражение для работы над газом A 2
Записано выражение для внутренней энергии ΔU 2
Найдена мощность N 1

Задача 5. Электрическая цепь

Сопротивление $r \ll R$, поэтому рассмотрим амперметры как идеальные проводники. Тогда общее сопротивление $R_{\text{общ}}$ цепи (рис. 16) равняется:

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_3}{3} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right)^{-1} = \frac{11}{7} \text{ Ом}.$$

Сила общего тока $I = \dfrac{U}{R_{\text{общ}}} = 2{,}1$ мА.

Силы токов I_1, I_2, I_3 одинаковы, так как резисторы одинаковы и соединены параллельно:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{I}{3} = 0{,}7 \text{ мА},$$

Из закона Ома при постоянном U следует, что $I \sim \dfrac{1}{R}$.

Сила тока I_6, текущего через R_4, минимальна. Тогда:

$$I_5 = 2I_6, \quad I_4 = 4I_6.$$

Сила тока, текущего через батарейку:

$$I = I_4 + I_5 + I_6 = 7I_6,$$

откуда

$$I_6 = \frac{1}{7}I = 0{,}3 \text{ мА}, \quad I_5 = \frac{2}{7}I = 0{,}6 \text{ мА}, \quad I_4 = \frac{4}{7}I = 1{,}2 \text{ мА}.$$

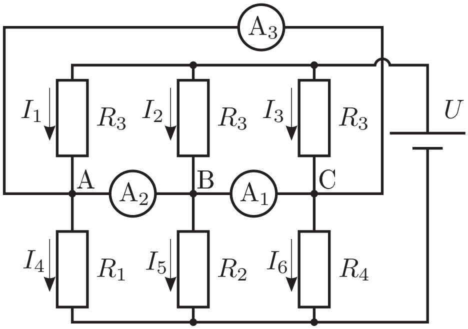

Рис. 16

Для токов в контуре ABC, состоящем из амперметров, верно равенство:

$$i_{\mathrm{AB}} + i_{\mathrm{BC}} + i_{\mathrm{CA}} = 0. \tag{5}$$

Сумма токов в узле B равна 0 (закон сохранения заряда):

$$i_{\mathrm{AB}} + I_2 = i_{\mathrm{BC}} + I_5. \tag{6}$$

Аналогично для узла C:

$$i_{\mathrm{BC}} + I_3 = i_{\mathrm{CA}} + I_6. \tag{7}$$

Из (5), (6), (7) находим токи через амперметры:

$$i_{\mathrm{AB}} = -\frac{1}{7}I = -0{,}3 \text{ мА}, \quad i_{\mathrm{BC}} = \frac{1}{21}I = 0{,}1 \text{ мА}, \quad i_{\mathrm{CA}} = \frac{2}{21}I = 0{,}2 \text{ мА}.$$

Критерии оценивания

За идею не учитывать на первом этапе сопротивление амперметра 1
Найдено общее сопротивление цепи 2
Найдена сила тока через батарейку 1
Записано равенство (5) 1
Записаны два (для двух узлов) равенства для силы токов (по 1 баллу) 2
Найдены силы токов через амперметры (по 1 баллу) 3