Условия и решения задач

9 класс

9.5. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение
$$a(x-a)^2+b(x-b)^2=0$$
имеет единственное решение. Докажите, что $|a|=|b|$.

(*Н. Агаханов*)

Первое решение. Пусть $|b|\neq|a|$. Тогда $b+a\neq 0$, и данное уравнение — квадратное: $(a+b)x^2-2(a^2+b^2)x+(a^3+b^3)=0$. При этом его дискриминант $\frac{D}{4}=(a^2+b^2)^2-(a+b)(a^3+b^3)=-ab(a-b)^2$ не равен нулю, так как a, b — ненулевые, и $a-b\neq 0$. Значит, уравнение не может иметь ровно одно решение. Противоречие.

Замечание. Заметим, что при $b=-a$ данное уравнение — линейное: $-4a^2x=0$, и оно имеет единственное решение $x=0$. Если же $a=b$, то дискриминант обращается в ноль, и у уравнения также ровно одно решение.

Второе решение. Пусть числа a и b одного знака. Если они оба — положительные, то $a(x-a)^2\geqslant 0$ и $b(x-b)^2\geqslant 0$, откуда следует, что равенство $a(x-a)^2+b(x-b)^2=0$ может выполняться только в случае, когда одновременно выполняются равенства $a(x-a)^2=0$ и $b(x-b)^2=0$, то есть $x=a$ и $x=b$, откуда $a=b$. Аналогично рассматривается случай, когда оба числа — отрицательные (знаки неравенств меняются на противоположные).

Пусть теперь числа имеют разные знаки; без ограничения общности, $a>0$ и $b<0$. Тогда можно положить $a=c^2$, $b=-d^2$, где $c>0$ и $d>0$. Воспользовавшись формулой разности квадратов, преобразуем данное уравнение: $0=a(x-a)^2+b(x-b)^2=c^2(x-a)^2-d^2(x-b)^2=(c(x-a)-d(x-b))(c(x-a)+d(x-b))$. Если $c\neq d$, полученное уравнение имеет два различных корня $x_1=\frac{ac-bd}{c-d}=\frac{c^3+d^3}{c-d}$ и $x_2=\frac{ac+bd}{c+d}=\frac{c^3-d^3}{c+d}$ (заметим, что $|x_2|<|x_1|$, поскольку $|c^3+d^3|>|c^3-d^3|$ и $|c-d|<|c+d|$). Значит, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо равенство $c=d$, из которого и следует, что $b=-a$.

Комментарий. Из рассмотрения дискриминантов получено равенство $a = b$ (при этом потерян случай $a = -b$, когда уравнение не квадратное) — 3 балла.

При исследовании знаков a и b верно разобран только случай, когда числа a и b одного знака — 2 балла.

При исследовании знаков a и b верно разобран только случай, когда числа a и b разного знака — 4 балла.

9.6. Тридцать девочек — 13 в красных платьях и 17 в синих платьях — водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

(*Р. Женодаров*)

Ответ. 17.

Решение. Рассмотрим любую девочку. Цвета платьев её соседок слева и справа могли быть такими: синий–синий, синий–красный, красный–синий, красный–красный. Девочка ответила «да» ровно в первых двух случаях; значит, она сказала «да» ровно в том случае, когда её соседка *слева* была в синем платье.

Итак, поскольку ровно у 17 девочек соседка слева была в синем платье, то и ответ «да» прозвучал 17 раз.

Замечание. Имеются другие (более сложные) обоснования того, что в хороводе ровно 17 девочек, ответивших «да».

Комментарий. Только ответ (без обоснования, либо полученный рассмотрением частных случаев расстановки) — 1 балл.

За попытки обоснования, в которых рассмотрены не все варианты расположения девочек, дополнительные баллы не начисляются.

9.7. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

(Л. Емельянов)

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Покажем сначала, что прямая OB касается окружности ω_b, описанной около треугольника BB_1B_2.

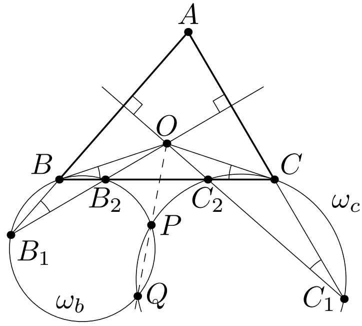


Рис. 1

Пусть $AB < BC$; тогда серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает сторону BC в точке B_2, а продолжение стороны AB за точку B — в точке B_1 (см. рис. 1). Имеем $\angle B_2B_1A = \angle OB_1A = 90^\circ - \angle A$. С другой стороны, из равнобедренного треугольника BOC получаем $\angle B_2BO = \angle CBO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC = 90^\circ - \angle A$. Таким образом, вписанный угол $\angle B_2B_1B$ равен углу между секущей BB_2 и прямой OB. Из обратной теоремы об угле между касательной и секущей следует, что OB касается ω_b. Если $AB < BC$, то проходит то же рассуждение с заменой точки A на C и наоборот.

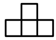
Аналогично, прямая OC касается окружности ω_c, описанной около треугольника CC_1C_2. Теперь несложно доказать, что прямая OP проходит через Q. Допустим, что это не так, и прямая OP пересекает ω_b и ω_c в различных точках Q_b и Q_c. Тогда по теореме о произведении отрезков секущих имеем $OQ_b \cdot OP = OB^2 = OC^2 = OQ_c \cdot OP$, откуда $OQ_b = OQ_c$; наконец, поскольку точки Q_b и Q_c лежат по ту же сторону от O, что и P, получаем $Q_b = Q_c$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Для неостроугольного треугольника утверждение задачи также верно. Заметим, однако, что окружности, описанные около треугольников B_1B_2B и C_1C_2C не всегда пересекаются (даже в остроугольном треугольнике). В этом случае утверждение задачи сохранит силу, если заменить заменить прямую PQ на радикальную ось окружностей ω_b и ω_c.

Замечание 2. Нетрудно также показать, что на прямой PQ (или на радикальной оси ω_b и ω_c) лежит вершина A.

Комментарий. Доказано, что прямая OB касается ω_b (или что прямая OC касается ω_c) — 3 балла.

Доказано, что $OB_1 \cdot OB_2 = OC_1 \cdot OC_2$, дальнейшее продвижение отсутствует — 4 балла.

9.8. В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и -1 (в каждой клетке — по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения фигурки  на доске (фигурку можно поворачивать, но её клетки не должны выходить за пределы доски). Назовём такое расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений. (*М. Антипов*)

Ответ. 36.

Решение. Покажем, что в каждом «кресте» из пяти клеток доски найдётся хотя бы одно неудачное расположение. Предположим противное; пусть в крайних клетках креста стоят числа a, b, c, d, а в центральной — e; обозначим через S сумму всех этих пяти чисел. Тогда по нашему предположению $S - a = S - b = S - c = S - d = 0$, откуда $a = b = c = d$. Значит, $S - a = e + 3a = 0$, то есть $e = -3a = \pm 3$, что невозможно.

−	+	−	+	−	+	−	+
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	+	−	+	−

Рис. 2

Итак, в каждом из 36 «крестов» (с центрами во всех некрайних клетках) есть неудачное расположение фигурки. Ясно, что каждое расположение содержится не более, чем в одном кресте; поэтому таких расположений не меньше 36.

С другой стороны, на рис. 2 показан пример расстановки, при которой количество неудачных расположений равно 36 (в каждой клетке указан знак соответствующего числа). Действительно, в любом кресте неудачное расположение ровно одно, а все расположения, прилегающие длинной стороной к границе доски — удачны.

Комментарий. Только ответ без обоснования — 0 баллов.

Приведён только пример ровно с 36 неудачными расположениями — 2 балла.

Доказано только, что расположений должно быть не меньше 36, но соответствующий пример отсутствует (или неверен) — 4 балла.

Доказано, что хотя бы одно из четырёх расположений фигурки в «кресте» неудачно — 2 балла. (Эти 2 балла могут суммироваться с баллами за верный пример.)