Условия и решения задач

9 класс

9.1. Даны натуральные числа M и N, большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M, надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечётной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N? Найдите все возможные ответы. *(Н. Агаханов)*

Ответ. Цифрой 6.

Решение. По условию, $M = 3N$, значит, число $A = M - N = 2N$ чётно. Но, по условию, число A составлено из нечетных цифр и двойки. Значит, A оканчивается на 2. Поэтому вдвое меньшее число N оканчивается либо на 1, либо на 6.

Покажем, что N не может оканчиваться на 1. Если N оканчивается на 1, то при его удвоении не происходит переноса десятка из последнего в предпоследний разряд. Значит, предпоследняя цифра числа $A = 2N$ будет чётной, а она должна быть нечётной. Противоречие.

Замечание. Пары чисел N и M, удовлетворяющие условию, существуют, например, $N = 16$, $M = 48$. Более того, таких пар бесконечно много. Все подходящие числа N описываются так: первая цифра — 1 или 2, далее несколько (возможно, ноль) цифр, каждая из которых равна 5 или 6, и последняя цифра 6.

Комментарий. Верный ответ и пример числа N с цифрой 6 на последнем месте — 1 балл.

Установлено, что последняя цифра числа M на 2 больше последней цифры числа N — 1 балл.

Показано, что последняя цифра числа N может быть только единицей или шестёркой — 2 балла.

Баллы за различные продвижения складываются.

Заметим, что в задаче не требуется приведение примера такого числа. Достаточно доказать, что никакая цифра, кроме 6, последней оказаться не может.

9.2. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB. (*Н. Агаханов*)

Решение. Покажем, что $\angle A_1C_1B_1 = 45°$. Именно, из равнобедренных треугольников AB_1C_1 и BA_1C_1 имеем $\angle AC_1B_1 = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$ и $\angle BC_1A_1 = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$, а тогда $\angle A_1C_1B_1 = 180° - \angle AC_1B_1 - \angle BC_1A_1 = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = 45°$.

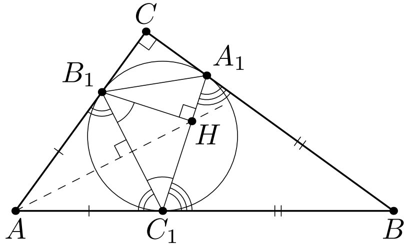
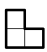


Рис. 1

Итак, острый угол в прямоугольном треугольнике $\triangle B_1HC_1$ равен $45°$; значит, этот треугольник равнобедренный. Поэтому точка H лежит на серединном перпендикуляре к отрезку B_1C_1. Но этим же серединным перпендикуляром является биссектриса равнобедренного треугольника AB_1C_1. Это и значит, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

Замечание. После нахождения равенств $\angle B_1C_1H = \angle C_1B_1H = 45°$ можно действовать и по-другому. Именно, треугольники AB_1H и AC_1H равны по двум сторонам ($AB_1 = AC_1$, $B_1H = C_1H$) и углу между ними; поэтому $\angle B_1AH = \angle C_1AH$.

Комментарий. Доказано только, что $\angle A_1C_1B_1 = 45°$ — 2 балла.

9.3. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трёх соседних клеток  так, чтобы каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекал одно и то же количество уголков? (Ряд пересекает уголок, если содержит хотя бы одну его клетку.) (*Д. Храмцов*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое разбиение нашлось. Рассмотрим первую и вторую снизу горизонтали доски; обозначим их H_1 и H_2. Каждый уголок на доске пересекается с двумя соседними горизонталями. Значит, если уголок пересекается с H_1, то он пересекается и с H_2. Теперь, если горизонталь H_2 пересекает какой-то уголок, не пересекающийся с H_1, то она пересекает больше уголков, чем H_1, что невозможно. Итак, все уголки, пересекающиеся с первой или второй горизонталями, не выходят за их пределы и образуют вместе горизонтальную полосу H размера 2×12.

Аналогично, все уголки, пересекающиеся с первой или второй слева вертикалями V_1 и V_2, образуют вместе вертикальную полосу V размера 12×2. В таком случае все уголки, пересекающиеся с левым нижним квадратом 2×2, должны лежать как в H, так и в V, то есть должны лежать в этом квадрате. Но тогда квадрат 2×2 должен разбиться на трёхклеточные уголки, что невозможно. Противоречие.

Комментарий. Доказано только, что (вертикальная или горизонтальная) полоса размера 2×12 с края доски полностью замощена уголками — 3 балла.

9.4. По кругу выписаны 1000 чисел. Петя вычислил модули разностей соседних чисел, Вася — модули разностей чисел, стоящих через одно, а Толя — модули разностей чисел, стоящих через два. Известно, что любое Петино число больше любого Васиного хотя бы вдвое. Докажите, что любое Толино число не меньше любого Васиного. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть v — наибольшее из Васиных чисел, а t — какое-то из Толиных (скажем, $t = |a - d|$, где a, b, c, d — четыре выписанных подряд числа). Достаточно доказать, что $t \geqslant v$.

Среди Петиных чисел встречается число $|a - b|$; значит, $|a - b| \geqslant 2v$. С другой стороны, $|b - d|$ — одно из Васиных чисел; значит, $|b - d| \leqslant v$. Итак, $t = |a - d| = |(a - b) + (b - d)| \geqslant$ $\geqslant |a - b| - |b - d| \geqslant 2v - v = v$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Доказано только, что любое Толино число не меньше **какого-то** Васиного — 0 баллов.