11 класс

11.5. Существуют ли такие 2013 различных натуральных чисел, что сумма любых 2012 из них не меньше квадрата оставшегося?

(*О. Подлипский*)

Ответ. Не существуют.

Решение. Предположим, что такие числа нашлись. Поскольку они различны и их 2013, наибольшее из них не меньше 2013; обозначим его через a. Тогда сумма всех остальных не превосходит $2012a$, а его квадрат равен $a^2 \geqslant 2013a$, то есть он больше этой суммы. Противоречие.

Комментарий. Рассмотрено максимальное из чисел и замечено, что оно не меньше 2013 — 2 балла.

11.6. Три попарно непересекающиеся окружности ω_x, ω_y, ω_z радиусов r_x, r_y, r_z соответственно лежат по одну сторону от прямой t и касаются ее в точках X, Y, Z соответственно. Известно, что Y — середина отрезка XZ, $r_x = r_z = r$, а $r_y > r$. Пусть p — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_x и ω_y, а q — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_y и ω_z. В пересечении прямых p, q, t образовался неравнобедренный треугольник. Докажите, что радиус вписанной в него окружности равен r.

(*П. Кожевников*)

Первое решение. Обозначим вершины данного треугольника через A, B, C, как показано на рис. 5. Пусть q' — вторая общая внутренняя касательная к ω_y и ω_z, а t' — вторая их общая внешняя касательная. Обозначим через A' и B' точки пересечения прямой t' с q и t соответственно, а через M и N — точки пересечения прямой q' с t и t' соответственно. Обозначим также центры окружностей ω_x, ω_y и ω_z через I_x, I_y и I_z соответственно.

Прямая p при симметрии относительно прямой I_yY переходит либо в q, либо в q'. Но, если она переходит в q, то треугольник ABC равнобедренный. Значит, p и q' симметричны относительно I_yY. С другой стороны, прямые q и q', а также t и t' симметричны относительно линии центров I_yI_z. Значит, $\angle B'A'C = \angle NMB' = \angle BAC$. Кроме того, $\angle ACB = \angle A'CB'$

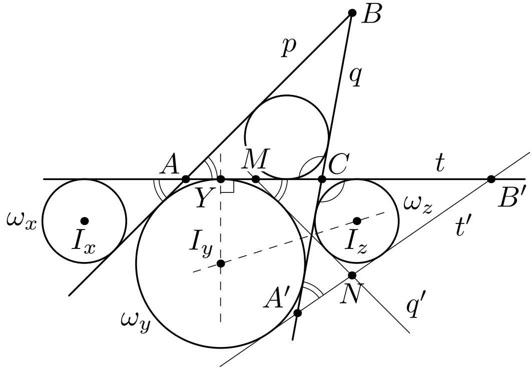

Рис. 5

как вертикальные. Итак, треугольники ABC и $A'B'C$ подобны по двум углам.

Наконец, ω_y — их общая вневписанная окружность, касающаяся соответственных сторон AC и $A'C$; значит, коэффициент их подобия равен 1, и эти треугольники равны. Поэтому радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и $A'B'C$, также равны. Но окружность, вписанная в $A'B'C$ — это ω_z, откуда и следует требуемое.

Замечание. Вариацией рассуждения, приведённого выше, можно показать, что треугольники ABC и $A'B'C$ симметричны относительно прямой CI_y.

Второе решение. Опять обозначим вершины данного треугольника A, B, C, как показано на рис. 6. Пусть ω_0 — вписанная окружность треугольника ABC, и ее радиус равен $r_0 = r/k$ (тем самым, в задаче требуется доказать, что $k = 1$). Обозначим через P, Q и T точки касания ω_0 с прямыми p, q и t соответственно, а через K и L — точки касания ω_y с прямыми p и q соответственно.

Обозначим $x = AT$, $z = CT = AC - x$. Покажем, что $AY = z$. Действительно, из равенства отрезков касательных к окружности и равенства отрезков общих касательных к ω_y и ω_0 имеем: $AY - CT = AK - CQ = (PK - AP) - (QL - CL) = CL - AP = CY - AT = (AC - AY) - (AC - CT) = CT - AY$; то есть $AY - CT = CT - AY$, откуда $AY = CT = z$.

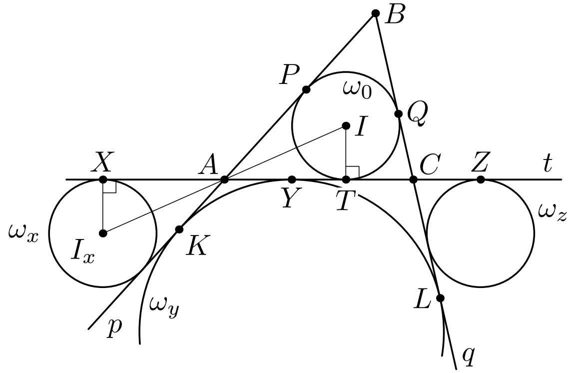

Рис. 6

Заметим, что $x \neq z$. Иначе $AT = AY$, значит, точки Y и T совпадают, а AC касается окружностей ω_y и ω_0 в этой общей точке. В этом случае треугольник ABC симметричен относительно линии центров окружностей ω_y и ω_0, значит, он равнобедренный, что противоречит условию.

Пусть I и I_x — центры окружностей ω_0 и ω_x. Треугольники ITA и I_xXA подобны, поэтому $XA = \frac{I_xX}{IT} \cdot AT = \frac{r}{r_0} \cdot AT = kAT = kx$. Аналогично, $ZC = kz$. Из условия $XY = YZ$ получаем $XA + AY = ZC + CY$; значит, $kx + z = kz + x$, откуда $(kx - x) - (kz - z) = 0$, или $(k-1)(x-z) = 0$. По доказанному $x \neq z$, значит $k = 1$, что и требовалось.

Комментарий. В верном решении используется сокращение на $AY - CY$ (либо на $AT - CT$ или аналогичную величину) без обоснования того факта, что $AY \neq CY$ — снимается 1 балл.

Тот факт, что $AY = CT$, может быть сформулирован, но не доказан в работе. Поскольку это известная теорема, за отсутствие в работе этого доказательства баллы не снижаются.

Только доказано равенство $AY = CT$ (или $AT = CY$) — 0 баллов (так как это известная теорема).

Задача сведена к равенству отрезков $AX = AT$ (или $CT = CZ$), но это равенство не доказано — 2 балла.

11.7. Найдите все натуральные k такие, что при каждом нечётном $n > 100$ число $20^n + 13^n$ делится на k. (*А. Голованов*)