11 класс

11.1. Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трёх чисел записали на доске, а затем всё, кроме трёх последних цифр этого произведения, стёрли. Какие три цифры могли остаться на доске? Найдите все возможные ответы. (*Н. Агаханов*)

Ответ. 000, 250, 500 или 750.

Решение. Пусть a, b, c — данные числа. По условию, числа $a+b-c$, $b+c-a$ и $c+a-b$ делятся на 10. Значит, на 10 делится и сумма этих чисел, равная $a+b+c$. С другой стороны, из равенства $a+b+c=(a+b-c)+2c$ и условия задачи следует, что последняя цифра суммы всех трёх чисел равна последней цифре числа $2c$. Значит, число c оканчивается на 5 или на 0. Аналогично, на 0 или на 5 оканчиваются числа a и b.

Наконец, поскольку сумма $a+b+c$ чётна, то и одно из чисел a, b, c также чётно. Итак, одно из этих чисел делится на 10, а два остальных — на 5. Тогда произведение делится на 250, а значит, может оканчиваться лишь на 250, 500, 750 или 000. Осталось привести примеры троек чисел, удовлетворяющие условиям, дающие данные последние цифры: $10\cdot 10\cdot 10=1000$; $5\cdot 5\cdot 10=250$; $5\cdot 5\cdot 20=500$; $5\cdot 5\cdot 30=750$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведены 4 примера, показывающие, что произведение может оканчиваться на каждое из чисел 000, 250, 500 и 750, дальнейшие продвижения отсутствуют — 2 балла.

Приведены только три из четырёх таких примеров, дальнейшие продвижения отсутствуют — 1 балл.

Доказано только, что все три числа делятся на 5 — 2 балла. Если, кроме этого, доказано, что одно из них делится на 10 — ещё 1 балл.

Доказано, что произведение делится на 250 (или эквивалентное утверждение) и приведены лишь примеры, показывающие, что три из возможностей 000, 250, 500 и 750 реализуются — 5 баллов.

11.2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в трёхчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть a_1 и a_2 — корни трёхчлена $P(x)$, а b_1 и b_2 — корни трёхчлена $Q(x)$; тогда $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)$ и $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2)$. Поэтому условие задачи принимает вид

$$(b_1 - a_1)(b_1 - a_2) + (b_2 - a_1)(b_2 - a_2) = \\ = (a_1 - b_1)(a_1 - b_2) + (a_2 - b_1)(a_2 - b_2).$$

Перенося все слагаемые в одну часть, мы получаем

$$(b_1 - a_1)(b_1 - a_2 + a_1 - b_2) + (b_2 - a_2)(b_2 - a_1 + a_2 - b_1) = 0,$$

то есть $(b_1 + a_2 - a_1 - b_2)(a_1 + b_1 - a_2 - b_2) = 0$, или $(b_1 - b_2)^2 - (a_1 - a_2)^2 = 0$. Это значит, что $|b_1 - b_2| = |a_2 - a_1|$.

Мы доказали, что расстояния между корнями трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны. Но квадраты этих расстояний как раз и равны, согласно формуле корней квадратного уравнения, дискриминантам этих трёхчленов.

Комментарий. Доказано только, что $|b_1 - b_2| = |a_2 - a_1|$ — 5 баллов.

Замечено, что для решения задачи достаточно доказать равенство $|b_1 - b_2| = |a_2 - a_1|$ — 1 балл.

11.3. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k, равнялась $k + 2013$? (*Р. Женодаров*)

Ответ. Нельзя.

Первое решение. Предположим, что искомое разбиение существует. Назовём множество A_k *большим*, если оно содержит больше одного элемента. Докажем индукцией по n, что существуют хотя бы n больших множеств. При $n = 1$ рассмотрим множество A_{k_1}, содержащее единицу; сумма чисел в нём равна $k_1 + 2013 > 1$, значит, оно содержит ещё хотя бы одно число, то есть оно большое. Для доказательства индукционного перехода предположим, что мы уже нашли большие множества $A_{k_1}, \ldots, A_{k_n}$, где $k_1 < \ldots < k_n$. Тогда число k_n+2013 не лежит в множестве A_{k_n} (в противном случае это множество не было бы большим). Значит, это число лежит в каком-то другом множестве $A_{k_{n+1}}$, сумма чисел в котором равна $k_{n+1}+2013 > k_n+2013$; поэтому оно также большое, и $k_{n+1} > k_n$.

Пусть $k_1 < k_2 < \ldots < k_{2014}$ — номера некоторых 2014 больших множеств. Рассмотрим множества $A_1, A_2, \ldots, A_{k_{2014}}$. В их объединении содержится не менее $k_{2014}+2014$ различных чисел, а значит, среди них есть число $d \geqslant k_{2014} + 2014$. Но это число d не может входить ни в одно из множеств $A_{k_1}, \ldots, A_{k_{2014}}$, ибо сумма в каждом из них меньше d. Противоречие.

Второе решение. Мы будем пользоваться определением большого множества из первого решения.

Докажем сначала, что имеется бесконечно много больших множеств. Предположим противное, тогда найдется такой номер t (считаем $t > 1$), что каждое из множеств $A_t, A_{t+1}, A_{t+2}, \ldots$ состоит из одного элемента. Итак, объединение множеств $A_t, A_{t+1}, A_{t+2}, \ldots$ есть множество $\{t + 2013, t + +2014, \ldots\}$. Тогда объединение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{t-1}$ совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, t+2012\}$. Но сумма элементов в этих множествах должна быть равна $2014+2015+\ldots+(t+2012)$, что меньше, чем сумма всех чисел в множестве $\{1, 2, \ldots, t + 2012\}$. Противоречие показывает, что наше утверждение верно.

Сумма чисел каждого из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ не превосходит $N + 2013$, значит все множества $A_1, A_2, \ldots, A_N$ — подмножества множества $\{1, 2, \ldots, N + 2013\}$. Так как имеется бесконечно много больших множеств, то зафиксируем такой номер N, что среди множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ хотя бы 2014 больших. Тогда объединение всех множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ содержит не менее $N + 2014$ элементов (они попарно не пересекаются) — противоречие.

Комментарий. В предположении, что нужное разбиение существует, доказано, что множеств, состоящих из двух или более элементов, бесконечное число — 3 балла.

Задача решена в предположении, что в искомом разбиении бесконечное число больших множеств (но эта бесконечность в работе не доказана) — 3 балла.

11.4. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω, соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP. *(Ф. Ивлев)*

Первое решение. Пусть S — середина BP, O — центр окружности Ω. Тогда O — середина отрезка PQ, а S — проекция O на BP. Заметим, что $QA = QC$, так как Q — середина дуги AC. Равнобедренные треугольники AQC и POC подобны, так как $\angle QAC$ и $\angle OPC$ опираются на одну дугу QC. Прямоугольные треугольники AQM и POS подобны, так как $\angle QAM$ и $\angle OPS$ опираются на одну дугу QB. Из доказанных подобий следует, что $\frac{AM}{PS} = \frac{AQ}{PO} = \frac{AC}{PC}$.

Поскольку $\angle MAC = \angle SPC$ (они опираются на одну дугу BC), получаем, что треугольники AMC и PSC подобны. Отсюда следует, что углы BMC и BSC равны как смежные с соответственными углами в этих треугольниках. Отсюда и следует, что точки B, C, M, S лежат на одной окружности.

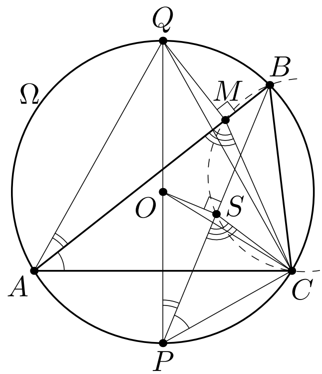

Рис. 3

Второе решение. Пусть K — точка, симметричная точке C относительно прямой BQ. Поскольку дуги AQ и CQ равны, прямая BQ является внешней биссектрисой угла ABC; значит, точка K лежит на прямой AB. Далее, из симметрии получаем $QK = QC = QA$. Значит, треугольник QAK равнобедренный, и его высота QM является медианой: $AM = MK$.

Поскольку треугольник BCK равнобедренный ($BC = CK$), имеем $\angle BKC = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle PBC$. Кроме того, $\angle BPC =$

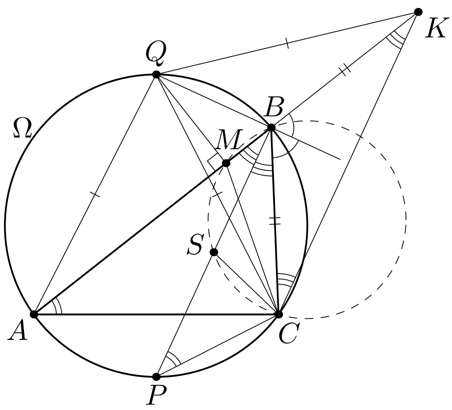

Рис. 4

$= \angle BAC$ как опирающиеся на одну дугу. Значит, треугольники CAK и CPB подобны по двум углам. Обозначим через S середину отрезка BP. Тогда углы CSB и CMK — соответственные в этих подобных треугольниках; значит, они равны, то есть $\angle CSB = \angle CMB$. Это и означает, что точки C, S, M, B лежат на одной окружности.

Комментарий. Доказано, что треугольники AQM и POS подобны, или доказано, что треугольники AQC и POC подобны — 1 балл.

Доказаны оба этих подобия — 3 балла.

На луче AB найдена точка K такая, что $BK = BC$ и $QA = QK$ (или $MA = MK$) — 2 балла.