10 класс

1. Условие. 22 июня в солнечный полдень наблюдатель, стоящий вертикально на ровной поверхности, обнаружил, что его тень имеет длину, равную его росту. На какой широте располагался наблюдатель?

1. Решение. Равенство высоты вертикального предмета и длины его тени на горизонтальной поверхности означает, что высота Солнца h составляет 45°. Так как картина наблюдается в солнечный полдень, Солнце располагается в верхней кульминации. Его высота в это время равна

$h = 90° – \varphi + \delta$, если Солнце располагается к югу от зенита ($\varphi > \delta$),

$h = 90° – \delta + \varphi$, если Солнце располагается к северу от зенита ($\varphi < \delta$).

Данные соотношения можно написать в виде одной формулы:

$$h = 90° – |\varphi – \delta|.$$

22 июня (в летнее солнцестояние) склонение Солнца δ положительно и равно углу наклона экватора к эклиптике ε (23.4°). Из предыдущих формул получаем выражение для широты места:

$$\varphi = \varepsilon \pm (90° – h).$$

Указанная картина могла наблюдаться на широтах –21.6° и +68.4°.

1. Рекомендации для жюри. Первым этапом решения задания является вывод о значении величины высоты Солнца над горизонтом. Этот этап оценивается в 2 балла. Запись соотношения для высоты Солнца в верхней кульминации может быть сделана участником олимпиады как в виде двух формул, так и одной формулой с применением модуля. Вместо высоты можно использовать соотношения для зенитного расстояния Солнца, каждый из этих подходов считается правильным и оценивается в 2 балла (в случае двух формул – по 1 баллу за каждую). Решение уравнения и формулировка ответа оценивается в 4 балла – по 2 балла за каждое из возможных решений. Таким образом, если в решении идет поиск только одного значения широты, итоговая оценка не может превышать 5 баллов.

2. Условие. Масса атмосферы Венеры составляет $4.8 \cdot 10^{20}$ кг. В ней на каждые 1000 молекул приходится 965 молекул углекислого газа CO_2 и 35 молекул азота N_2. 97% массы атмосферы Титана приходится на долю азота и 3% – на долю метана CH_4. Атмосферное давление на поверхности Титана в полтора раза превышает атмосферное давление на поверхности Земли. В какой из атмосфер масса азота больше и во сколько раз?

2. Решение. Рассчитаем сначала массу азота в атмосфере Венеры. Масса газа может быть выражена через число молекул N, молярную массу этого газа μ и число Авогадро A следующим образом:

$$m = \frac{N}{A}\mu,$$

Запишем отношение массы азота в атмосфере Венеры к массе всей её атмосферы:

$$\frac{m_{N2}}{m_{ATM}} = \frac{N_{N2}}{N_{ATM}} \cdot \frac{\mu_{N2}}{\mu_{ATM}}.$$

Отношение числа молекул азота к числу всех частиц в атмосфере дано в условии. Молярная масса азота равна 0.028 кг/моль. Молярная масса газа атмосферы Венеры будет очень близка к молярной массе углекислого газа (0.044 кг/моль), поскольку он является основным компонентом атмосферы. Если учесть примесь азота, то значение молярной массы практически не изменится (0.0434 кг/моль). Получаем, что масса азота в атмосфере Венеры равна 10^{19} кг.

Массу атмосферы Титана можно вычислить из следующих соображений. Вся масса атмосферы $m_{\text{АТМ}}$ давит на всю поверхность Титана:

$$p = \frac{m_{\text{АТМ}}\, g}{S} = \frac{m_{\text{АТМ}}\, GM}{4\pi R^4}.$$

Здесь g – ускорение свободного падения на поверхности Титана, M и R – масса и радиус Титана. Масса атмосферы равна

$$m_{\text{АТМ}} = \frac{4\pi p R^4}{GM}.$$

или $9 \cdot 10^{18}$ кг. Это примерно равно массе азота в атмосфере Венеры, а сама атмосфера Титана состоит из азота практически полностью. В итоге, масса азота в атмосфере Венеры совсем ненамного (примерно на 10%) больше, чем в атмосфере Титана.

2. Рекомендации для жюри. Решение задачи разбивается на две части. В первой части участнику необходимо рассчитать массу азота в атмосфере Венеры. Это оценивается в 4 балла. В частности, за вычисление молярной массы атмосферы Венеры выставляется 1 балл. За переход от объемной к массовой доле выставляется 3 балла. В случае, если участник не делает этого перехода и считает, что масса азота составляет 0.035 массы атмосферы Венеры, эта часть задачи не засчитывается, и итоговая оценка не может превышать 3 баллов.

Во второй части задачи участнику необходимо вычислить массу атмосферы Титана. За правильное вычисление он получает 3 балла. Еще 1 балл выставляется за правильный вывод о соотношении масс азота в обеих атмосферах. Этот балл может быть выставлен только в том случае, если обе части задачи решены верно.

3. Условие. Будущие поселенцы Луны наблюдают явление метеора у темного края диска Земли, с трудом различимое визуально в телескоп с диаметром объектива 30 см. Какой блеск будет иметь этот метеор на Земле, если он наблюдается в зените? С каким объектом неба он сравним по яркости?

3. Решение. Проницающая способность человеческого глаза составляет около 6^m, однако кратковременный и движущийся источник света с таким блеском заметить не удастся. Опытный наблюдатель метеоров с адаптированным к темноте зрением замечает эти явления при блеске до 5^m. Используя телескоп с диаметром объектива D, можно увеличить проницающую способность:

$$m = 5 + 5\lg D/d,$$

где d – диаметр зрачка глаза (в среднем 0.6 см). Для 30-см телескопа мы получаем величину проницающей способности при наблюдении метеоров: 13.5^m. Метеор, с трудом наблюдавшийся космонавтами, имел примерно такой блеск. Радиус орбиты Луны R составляет 384 тыс. км. Так как он существенно больше радиуса Земли, можно считать, что именно такое расстояние отделяло космонавтов от метеора. Наблюдатели на Земле располагаются к нему существенно ближе – если метеор виден в зените, расстояние до него равно его высоте H. Типичные высоты метеоров составляют порядка 100 км. Отсюда мы получаем звездную величину метеора на Земле:

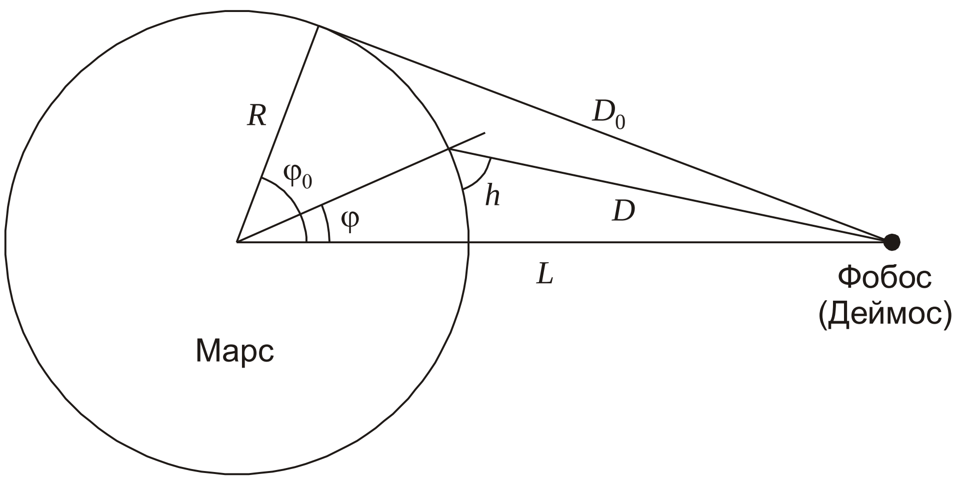
$$m_0 = m + 5\lg H/R = 5 + 5\lg (HD/Rd) \sim -4^m.$$

Это был яркий болид, по блеску сравнимый с Венерой.

3. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участники олимпиады должны определить проницающую силу телескопа при наблюдении метеоров (в виде формулы или численно). Эта часть задачи оценивается в 3 балла. Если в качестве проницающей способности глаза принимается величина 6^m (как для звезд), оценка снижается не более, чем на 1 балл. Правильное указание высоты метеора (допускаются значения от 70 до 120 км) оценивается в 2 балла, вычисление звездной величины по формуле Погсона – в 2 балла, указание Венеры как объекта похожей яркости – еще в 1 балл.

4. Условие. Опишите вид Фобоса и Деймоса с поверхности Марса для наблюдателя на различных марсианских широтах. В каких пределах изменяется их видимый диаметр и фаза в зависимости от широты? Считать, что спутники обращаются в плоскости экватора планеты.

4. Решение. Оба спутника Марса обращаются вокруг него практически в плоскости экватора планеты на небольшом расстоянии от нее. Поэтому вблизи полюсов Марса они не могут быть видны из-за своего суточного параллактического смещения. Для того, чтобы определить, на каких широтах Марса можно увидеть спутник, обратимся к рисунку:



Максимальная (по модулю) широта, на которой можно увидеть спутник, составляет

$$\varphi_0 = arccos\frac{R}{L},$$

где R – радиус Марса, L – радиус орбиты спутника. Значение широты равно 69° для Фобоса и 82° для Деймоса.

Пусть наблюдатель находится на широте φ на поверхности Марса, причем по модулю эта широта меньше φ_0. Максимальное расстояние до спутника, при котором он может наблюдаться, соответствует его положению на горизонте. Такое положение может наблюдаться на всех этих широтах, так как орбитальные периоды Фобоса и Деймоса не равны периоду обращения Марса вокруг своей оси, и они будут периодически восходить и заходить за горизонт. Величина максимального расстояния не зависит от широты и составляет

$$D_0 = \sqrt{L^2 - R^2},$$

а минимальный угловой диаметр спутника равен

$$\delta_0 = \frac{2r}{D_0} = \frac{2r}{\sqrt{L^2 - R^2}}.$$

Эта величина составляет 8′ для Фобоса и 1.8′ для Деймоса. Наименьшее расстояние от наблюдателя до спутника *D* можно получить из теоремы косинусов:

$$D = \sqrt{L^2 + R^2 - 2LR\cos\varphi}.$$

Угловой диаметр спутника будет равен

$$\delta_0 = \frac{2r}{D} = \frac{2r}{\sqrt{L^2 + R^2 - 2LR\cos\varphi}}.$$

Эта величина увеличивается с уменьшением модуля широты и достигает максимума на экваторе:

$$\delta_E = \frac{2r}{D_E} = \frac{2r}{L - R}.$$

Значение δ_E равно 11′ для Фобоса и 2′ для Деймоса.

Для того, чтобы ответить на второй вопрос задачи, отметим, что в зависимости от точки наблюдения склонение Фобоса меняется в пределах ±21°, склонение Деймоса – в пределах ±8°. Склонение Солнца на Марсе колеблется в пределах ±25°, и на любой широте, где могут наблюдаться спутники, они могут оказаться в близком соединении с Солнцем или даже вступить на его диск. Их фаза при этом будет равна нулю. Так же, вне зависимости от широты, Фобос и Деймос могут иметь фазу, равную единице, даже несмотря на большие угловые размеры тени Марса. Чтобы иметь полную фазу и при этом не попасть в тень (при этом возможно погружение в полутень Марса), спутник должен наблюдаться на горизонте (это может быть на любой широте, кроме окрестностей полюсов), а Солнце – быть также у горизонта в противоположной части неба.

4. Рекомендации для жюри. Первая часть решения связана с определением широтной области на Марсе, где Фобос и Деймос могут наблюдаться над горизонтом. Эта часть оценивается в 2 балла, по одному за каждый из спутников. Следующая часть решения связана с диапазоном видимых диаметров Фобоса и Деймоса. Выражение для минимального диаметра оценивается в 1 балл, формула для максимального диаметра – в 2 балла. Еще один балл выставляется за указание граничных численных значений для Фобоса и Деймоса. Итого, вторая часть решения оценивается в 4 балла. Последние 2 балла выставляются за указание граничных значений фазы (1 балл – за обоснование возможности наблюдения фазы, стремящейся к нулю, и 1 балл – за обоснование возможности наблюдения фазы, равной единице).

5. Условие. Среднее угловое расстояние между двумя компонентами звезды α Центавра равно 18″, а параллакс этой звезды – 0.74″. С какого расстояния компоненты α Центавра можно различить в телескоп с диаметром объектива 10 см? Считать, что линия между компонентами звезды перпендикулярна направлению на Солнце, а угловое расстояние между ними при наблюдении с Земли не меняется.

5. Решение. Параллакс звезды π есть угол, под которым с этой звезды виден радиус орбиты Земли (1 а.е.). Этот угол равен $1''/r_0$, где r_0 – расстояние до звезды в парсеках. Обозначим расстояние между компонентами α Центавра (в астрономических единицах) как a. Если линия, соединяющая звезды, перпендикулярна лучу зрения, то угловое расстояние между звездами при наблюдении с Земли (в угловых секундах) составит

$$d_0 = \frac{a}{r_0} = a\pi.$$

Если наблюдатель удалится на расстояние r от α Центавра, то для углового расстояния между ее компонентами будет справедливо неравенство:

$$d \le \frac{a}{r} = \frac{d_0}{r\pi}.$$

Строгое равенство будет иметь место в том случае, если наблюдатель останется на линии, перпендикулярной отрезку, соединяющему звезды. Угловое разрешение телескопа (в угловых секундах) с диаметром объектива D (в сантиметрах) составляет

$$d_{\text{М}} = \frac{A}{D},$$

где A=14 см. Приравнивая величины d и $d_{\text{М}}$, получаем

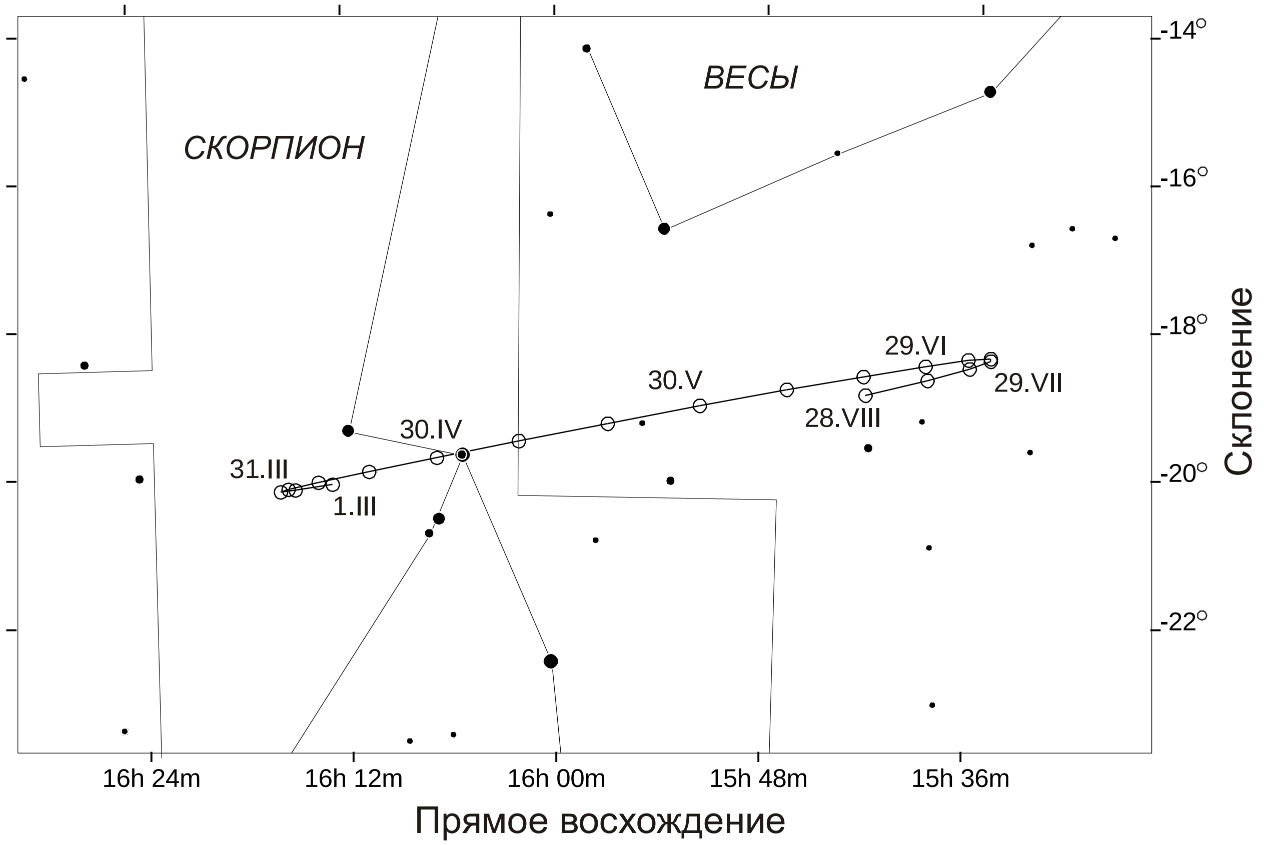
$$r \le \frac{Dd_0}{A\pi}.$$

Максимальное расстояние, с которого можно разрешить двойную звезду α Центавра в 10-см телескоп, равно 17 пк.

5. Рекомендации для жюри. Решение задачи четко разделяется на несколько этапов, но они могут выполняться в другом порядке и с использованием иной терминологии. К примеру, можно рассчитать параллакс звезды α Центавра, соответствующий ее предельному разрешению в 10-см телескоп, и из него получить расстояние.

Вывод связи параллакса звезды (либо расстояния до нее), углового и пространственного расстояния между компонентами оценивается в 3 балла. Этот вывод может быть записан в виде формулы, возможно численное нахождение расстояния между компонентами α Центавра. Запись условия разрешимости двойной системы оценивается в 2 балла, причем участники могут использовать другие известные формулы (например, $d=\lambda/D$) и получать значения, отличающиеся на 10-20%. Окончательный вывод о максимальном расстоянии оценивается еще в 3 балла.

6. Условие. На рисунке показан трек планеты Солнечной системы (положение среди звезд в разные моменты времени). Положения, отмеченные кружками, отстоят друг от друга на 10 дней, даты подписаны через 30 дней. Что это за планета?



6. Решение. Трек показывает видимое перемещение планеты в течение полугода (с марта по август). За это время планета вначале движется в прямом направлении, затем разворачивается и движется попятно, а затем вновь прямо. В середине дуги попятного движения, в мае, планета оказывается на границе созвездий Весов и Скорпиона, противоположно Солнцу (в чем можно убедиться также по координатам, указанным на карте). Следовательно, это внешняя планета, и в середине дуги попятного движения она вступила в противостояние с Солнцем.

Используя шкалу склонений, приведенных на карте, можно определить ее масштаб, а также видимую (угловую) скорость перемещения планеты вблизи противостояния во второй половине мая. Угловое расстояние между положениями планеты 20 и 30 мая составляет 1.3°, то есть угловая скорость равна 0.13° в день.

Пусть радиус орбиты планеты равен r, а радиус орбиты Земли – r_0. В момент противостояния планета располагается на расстоянии ($r - r_0$) от Земли. Скорости Земли r_0 и планеты v сонаправлены (наклон и эллиптичность орбиты планет не вносит существенного отклонения), и видимая угловая скорость планеты равна

$$\omega = \frac{v_0 - v}{r - r_0}.$$

Из III закона Кеплера или из выражения для первой космической скорости можно получить соотношение скоростей планеты и Земли:

$$v = v_0\sqrt{\frac{r_0}{r}}.$$

Подставляя вторую формулу в первую, получаем:

$$\omega = \frac{v_0}{r}\cdot\frac{1-(r_0/r)^{1/2}}{1-(r_0/r)} = \frac{v_0}{r}\cdot\frac{1}{1+(r_0/r)^{1/2}} = \frac{v_0}{r+(r_0 r)^{1/2}}.$$

Обозначим отношение (r/r_0) – радиус орбиты в астрономических единицах – через a. Тогда последнее соотношение примет вид:

$$\omega = \frac{v_0}{r_0}\cdot\frac{1}{a+\sqrt{a}} = \omega_0\cdot\frac{1}{a+\sqrt{a}}.$$

Здесь ω_0 – угловая скорость орбитального вращения Земли, равная 0.986° в сутки. Мы получаем квадратное уравнение

$$a\omega + \sqrt{a}\,\omega - \omega_0 = 0.$$

Это уравнение имеет один действительный корень:

$$a = \left(\frac{\sqrt{1+4\omega_0/\omega}-1}{2}\right)^2.$$

Подставляя измеренное по графику значение ω, получаем радиус орбиты планеты: 5.3 а.е. Это планета Юпитер.

6. Рекомендации для жюри. Приведенное решение является одним из способов точно определить радиус орбиты планеты, из чего можно выяснить, какая именно это планета. Существуют другие как точные, так и приближенные методы, оценивать которые следует, исходя из их адекватности.

В частности, для дальних внешних планет, к которым относится Юпитер, можно определить длину дуги попятного движения (10°) и приравнять ее к удвоенному значению наибольшей элонгации Земли при наблюдении с планеты. Этот метод по сути пренебрегает орбитальным движением планеты и дает завышенную оценку ее расстояния от Солнца – 11 а.е. Вывод, что мы наблюдаем планету Сатурн, в этом случае оценивается 2 баллами, а указание, что оценка завышена, и мы наблюдаем Юпитер – 6 баллами.

При использовании метода, описанного выше, измерение угловой скорости по треку оценивается в 2 балла, составление уравнения для этой величины – в 3 балла, его решение – в 2 балла и указание названия планеты – в 1 балл.

Если правильный ответ (Юпитер) дан без каких-либо корректных обоснований, участнику олимпиады выставляется 3 балла.