11 класс

11.1. Известно, что $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = 2$ и $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 3$. Найдите $\operatorname{tg}(A+B)$.

Ответ: 6.

Найдем сначала произведение тангенсов: $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 3$; $\frac{1}{\operatorname{tg} A} + \frac{1}{\operatorname{tg} B} = 3$; $\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} = 3$; $\frac{2}{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} = 3$; $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B = \frac{2}{3}$. А теперь найдем тангенс суммы: $\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = \frac{2}{1 - \frac{2}{3}} = 6$.

+ полное обоснованное решение

± ход решения верен, но в конце, при вычислении $\operatorname{tg}(A+B)$ допущена арифметическая ошибка

− приведен только ответ

11.2. Туристическая фирма провела акцию: «Купи путевку в Египет, приведи четырех друзей, которые также купят путевку, и получи стоимость путевки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

Ответ: 29.

Пусть каждый из x потенциальных «счастливчиков» привел по 4 друга. Тогда «приведенных» клиентов $4x$, еще 13 пришли сами, значит, всего туристов было $13 + 4x$.

С другой стороны, x человек привели новых клиентов, а 100 человек — не привели, то есть всего туристов было $x + 100$.

Получим уравнение: $13 + 4x = x + 100$, откуда $x = 29$.

+ полное обоснованное решение

± уравнение составлено верно и получен верный ответ, но отсутствуют какие-либо пояснения

∓ в решении допущена арифметическая ошибка

− уравнение составлено неверно

− приведен только ответ

11.3. Функция $f(x)$ такова, что для всех значений x выполняется равенство $f(x+1) = f(x) + 2x + 3$. Известно, что $f(0) = 1$. Найдите $f(2012)$.

Ответ: $4052169 = 2013^2$.

Запишем условие задачи в виде: $f(x+1) - f(x) = 2x + 3$. Подставим вместо x числа 0, 1, 2, …, 2011. Получим: $f(1) - f(0) = 2 \cdot 0 + 3$, $f(2) - f(1) = 2 \cdot 1 + 3$, …, $f(2012) - f(2011) = 2 \cdot 2011 + 3$.

Сложим полученные равенства почленно: $f(2012) - f(0) = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 2011) + 3 \cdot 2012$. Учитывая, что $1 + 2 + \ldots + 2011 = \frac{2012 \cdot 2011}{2}$, получим, что $f(2012) = 1 + 2011 \cdot 2012 + 3 \cdot 2012 = 1 + 2 \cdot 2012 + 2012^2 = 2013^2 = 4052169$.

Школьник имеет право записать ответ в любом из двух указанных видов.

+ полное обоснованное решение

∓ путем рассмотрения отдельных примеров замечено, но не доказано, что искомое значение является квадратом, и приведен верный ответ

− приведен только ответ

11.4. Точка X расположена на диаметре AB окружности радиуса R. Точки K и N лежат на окружности в одной полуплоскости относительно AB, а $\angle KXA = \angle NXB = 60^\circ$. Найдите длину отрезка KN.

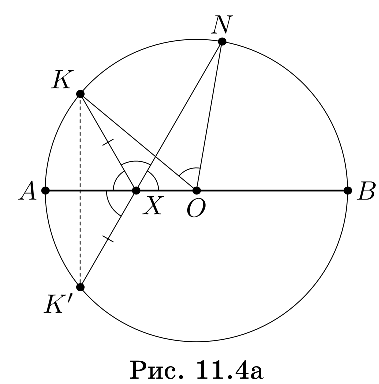

Рис. 11.4a

Ответ: $KN = R$.

Первый способ (*осевая симметрия*). Рассмотрим точку K', симметричную точке K относительно диаметра AB (см. рис. 11.4a). Она лежит на той же окружности и $\angle KXA = 60^\circ$. Тогда сумма трех углов с вершиной в точке X (*отмеченных на чертеже*) равна 180°. Следовательно, точки K', X и N лежат на одной прямой.

Треугольник $K'XK$ — равнобедренный с углом 120° при вершине. Следовательно, вписанный угол $KK'N$ равен 30°. Тогда центральный угол KON равен 60°. Таким образом, треугольник KON — равнобедренный с углом 60°, то есть он равносторонний. Значит, $KN = R$.

Второй способ (*вспомогательная окружность*). Докажем следующий факт: если точки X и O лежат на прямой a, лучи XK и XN образуют с ней равные углы, а точка O равноудалена от точек K и N, то точки K, N, X и O лежат на одной окружности.

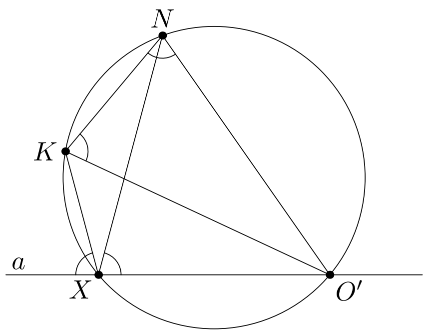

Рис.11.4б

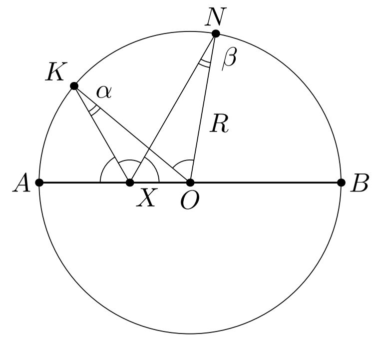

Рис.11.4в

Действительно, опишем окружность около треугольника KXN. Пусть она вторично пересекает прямую a в точке O' (см. рис. 11.4б). Тогда $\angle NKO' = \angle NXO'$ (*вписанные углы, опирающиеся на одну дугу*), а внешний угол при вершине X вписанного четырехугольника $NKXO'$ равен внутреннему углу KNO'. Следовательно, в треугольнике NKO' равны углы, прилежащие к стороне NK, поэтому $O'K = O'N$, то есть точка O' совпадает с точкой O.

Применив доказанное утверждение, в нашем случае получим, что $\angle KON = \angle KXN = 60^\circ$. Таким образом, треугольник KON — равнобедренный с углом 60°, то есть он равносторонний. Значит, $KN = R$.

Третий способ (*теорема синусов*). Пусть $\angle XKO = \alpha$; $\angle XNO = \beta$. По теореме синусов для треугольников XKO и XNO (см. рис. 11.4в): $\frac{R}{\sin 120^\circ} = \frac{XO}{\sin\alpha}$ и $\frac{R}{\sin 60^\circ} = \frac{XO}{\sin\beta}$.

Так как $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, то $\sin\alpha = \sin\beta$. Поскольку углы α и β — острые, то $\alpha = \beta$. Следовательно, точки X, K, O и N лежат на одной окружности. Дальнейшее описано выше.

Возможны и другие способы решения.

$+$ *полное обоснованное решение* (*любым способом*)

$\pm$ *приведено в целом верное решение с некоторыми незначительными пробелами*

$-$ *приведен только ответ*

11.5. В десятичной записи некоторого числа цифры расположены слева направо в порядке убывания. Может ли это число быть кратным числу 111?

Ответ: нет, не может.

Первый способ. Предположим, что существует число $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ такое, что $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ и кратное числу 111. Тогда заметим, что:

1) если в таком числе на последнем месте стоит 0, то его можно зачеркнуть и новое число $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}}$ будет обладать теми же свойствами: оно кратно числу 111 и цифры в нем будут также расположены в порядке убывания;

2) число $A = \overline{a_1a_2\ldots a_n} - 111$ будет обладать теми же свойствами.

Будем теперь последовательно отнимать 111 от числа $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ и, если в конце какой-нибудь разности будет получатся 0, то его зачеркивать и продолжать операцию.

Через какое-то количество шагов мы получим трехзначное число $\overline{b_1b_2b_3}$, цифры которого расположены в порядке убывания, и которое кратно числу 111. Но это невозможно, так как в записи трехзначного числа, кратного числу 111, все цифры должны быть равны. Следовательно, одновременное выполнение двух условий невозможно.

Второй способ. Предположим, что числа, указанные в условии, существуют. Пусть A — наименьшее среди них. Возможны два случая:

1) Число A кратно числу 111 и кратно числу 10, тогда, так как 10 и 111 взаимно просты, то число $\frac{A}{10}$ кратно 111 и цифры в его записи расположены в порядке убывания.

2) Число A кратно числу 111 и не кратно числу 10, тогда число A — 111 также кратно 111 и цифры в его записи также расположены в порядке убывания;

В обоих случаях получаем противоречие с тем, что число A — наименьшее. Следовательно, одновременное выполнение двух условий невозможно.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *найдены какие-то из указанных закономерностей, но решение не доведено до конца*

$-$ *приведен только ответ*

11.6. В правильной четырёхугольной усеченной пирамиде середина N ребра B_1C_1 верхней грани $A_1B_1C_1D_1$ соединена с серединой M ребра AB нижней грани $ABCD$. Прямые B_1C_1 и AB не лежат в одной плоскости. Докажите, что проекции ребер B_1C_1 и AB на прямую MN равны между собой.

Заметим, что требуемое утверждение равносильно тому, что равны проекции на прямую MN отрезков MB и B_1N (вдвое меньшей длины, см. рис. 11.6а, в).

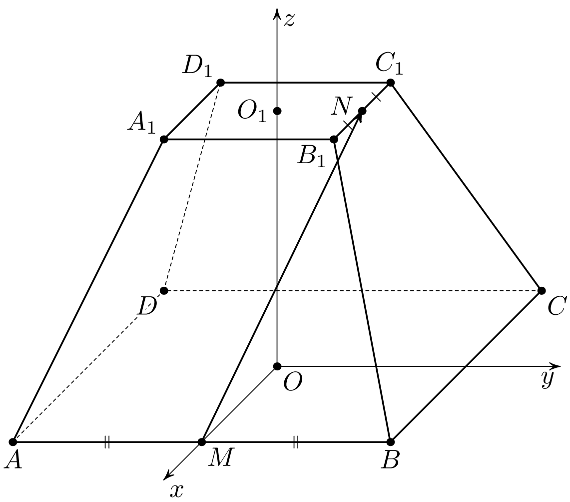

Рис. 11.6а

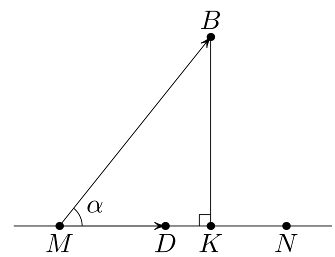

Рис. 11.6б

Первый способ. Пусть отрезок MK — проекция отрезка MB на прямую MN (см. рис. 11.6б). Тогда $MK = MB\cos\alpha$, где α — угол между прямыми MN и MB. Пусть также $\overrightarrow{MD}$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{MN}$. Тогда $MK = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$.

Аналогично, если PN — проекция отрезка B_1N на прямую MN, то $PN = \overrightarrow{B_1N}\cdot\overrightarrow{MD}$.

Введем прямоугольную декартову систему координат $OXYZ$ так, как показано на рис. 11.6а (O — *центр нижнего основания* $ABCD$, *оси* x *и* y *параллельны сторонам основания*).

Пусть длины ребер большего и меньшего оснований равны $2a$ и $2b$ соответственно, а высота пирамиды равна h.

Тогда $B(a;a;0)$; $B_1(b;b;h)$; $M(a;0;0)$; $N(0;b;h)$. Следовательно, $\overrightarrow{MN}(-a;b;h)$; $\overrightarrow{MB}(0;a;\ 0)$; $\overrightarrow{B_1N}(-b;0;0)$.

Значит, $MK = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB}\cdot\dfrac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \dfrac{\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \dfrac{ab}{|\overrightarrow{MN}|}$;

$$PN = \overrightarrow{B_1N}\cdot\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{B_1N}\cdot\frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{\overrightarrow{B_1N}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{(-b)(-a)}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{ab}{|\overrightarrow{MN}|}.$$

Таким, образом, $MK = PN$, что и требовалось.

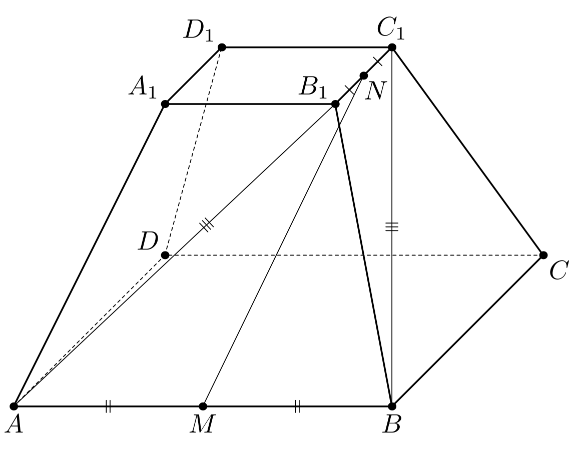

Рис. 11.6в

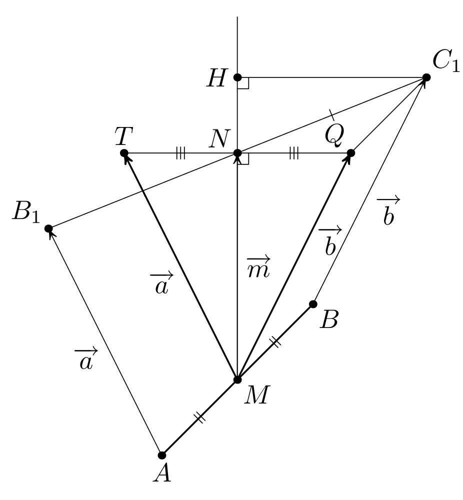

Рис. 11.6г

Второй способ. Пусть $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{b}$, тогда $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.

Отложим векторы $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{b}$ от точки M (см. рис. 11.6г).

Заметим, что $AB_1 = BC_1$, то есть $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, поэтому треугольник TMQ — равнобедренный. Значит, его медиана MN является и высотой. Тогда N — проекция точки Q на прямую MN.

Пусть H — проекция точки C_1 на прямую MN. Тогда в отрезок HN проектируется как отрезок QC_1, так и отрезок NC_1.

Поскольку MBC_1Q — параллелограмм, то отрезки MB и C_1Q равны и параллельны. Следовательно, их проекции на прямую MN равны. Следовательно, равны и проекции отрезков MB и NC_1 на прямую MN.

Случай, когда проектируемый отрезок и прямая «скрещиваются» (прямые MN и QC_1 в решении) можно рассмотреть подробнее.

Направим вдоль прямой MN ось z прямоугольной системы координат. Тогда проекция отрезка на ось z равна модулю разности координат по этой оси концов отрезка, то есть равна координате по оси z вектора, начало и конец которого совпадает с концами отрезка. Тогда координаты векторов QC_1 и NC_1 по оси z равны. Следовательно, равны и их проекции.

Возможно также решение, аналогичное приведенному выше, но использующее проекцию вектора на прямую. Это позволяет «переносить» вектор в любую точку, не изменяя его проекцию. Этот факт, равно как и формулу $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ для вектора, соединяющего середины сторон пространственного четырехугольника, можно считать общеизвестными, поэтому школьники могут их не доказывать.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено в целом верное решение с некоторыми незначительными пробелами*