10 класс

10.1. Расставьте в кружках, расположенных в вершинах квадрата и в его центре, пять натуральных чисел так, чтобы каждые два числа, соединенные отрезком, имели общий делитель, больший 1, а любые два числа, не соединенные отрезком, были бы взаимно просты.

Ответ: один из возможных примеров приведен на рисунке 10.1а.

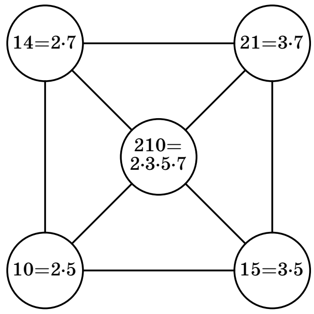


Рис. 10.1а

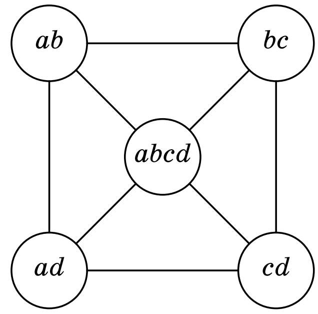


Рис. 10.1б

Пример может быть построен из таких соображений: возьмем четыре попарно взаимно простых числа a, b, c, d и запишем в двух противоположных вершинах квадрата числа ab и cd, в других вершинах — числа ad и bc, а в центре — $abcd$ (см. рис. 10.1б).

$+$ *приведен верный пример (в том числе и такой, как на рисунке 10.1б)*
$\pm$ *приведено два примера, один из которых — верный, а другой — неверный*
$-$ *приведен любой неверный пример*

10.2. Квадратный трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ имеет два различных корня, а квадратный трехчлен $a^2x^2 + 2b^2x + c^2$ корней не имеет. Докажите, что у первого трехчлена корни разного знака.

Пусть x_1, x_2, D_1 — корни и упрощенный дискриминант первого трехчлена, D_2 — упрощенный дискриминант второго трехчлена. Заметим, что достаточно доказать неравенство $ac < 0$. Действительно, по теореме Виета $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, поэтому корни первого трехчлена имеют разные знаки тогда и только тогда, когда a и c имеют разные знаки.

Докажем, что $ac < 0$. Это можно сделать различными способами.

Первый способ. Пусть это не так, тогда $ac \geqslant 0$. Из условия следует, что $D_1 = b^2 - ac > 0$, то есть, $b^2 > ac \geqslant 0$. Следовательно, $b^4 > (ac)^2$, откуда $D_2 = b^4 - a^2c^2 > 0$, то есть, второй трехчлен также имеет корни, что противоречит условию задачи.

Второй способ. У первого трехчлена есть два различных корня, поэтому $D_1 = b^2 - ac > 0$. У второго трехчлена корней нет, поэтому $D_2 = b^4 - a^2c^2 < 0$. Так как $b^4 - a^2c^2 = (b^2 - ac)(b^2 + ac)$, из двух записанных неравенств следует, что $b^2 + ac < 0$, то есть $ac < 0$.

$+$ *приведено верное обоснованное решение*
$\pm$ *в доказательстве от противного используется, что $ac > 0$ (вместо $ac \geqslant 0$)*

10.3. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC отмечены точки L и K соответственно, M — точка пересечения отрезков AK и CL. Известно, что площадь треугольника AMC равна площади четырехугольника $LBKM$. Найдите угол AMC.

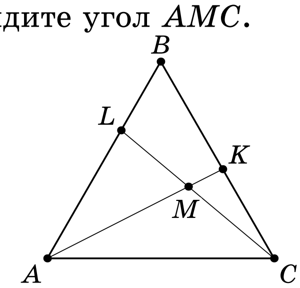


Рис. 10.2

Из равенства площадей треугольника AMC и четырехугольника $LBKM$ следует равенство площадей треугольников ACK и CBL (см. рис. 10.2). Действительно, добавив к обеим частям равенства площадь треугольника CMK, получим требуемое.

Заметим, что $S_{ACK} = \frac{1}{2}AC \cdot CK \cdot \sin\angle ACK$, а $S_{CBL} = \frac{1}{2}BC \cdot BL \times \sin\angle CBL$. Учитывая равенство сторон и углов в равностороннем треугольнике ABC, получим, что $CK = LB$, то есть $\triangle ACK = \triangle CBL$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle CKA = \angle BLC$. Учитывая, что $\angle BLC + \angle BCL = 180^\circ - \angle LBC = 120^\circ$, получим: $\angle AMC = \angle MCK + \angle MKC = \angle LCB + \angle BLC = 120^\circ$.

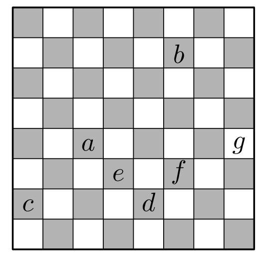
Комментарий. После того, как доказано, что $CK = LB$, далее можно рассуждать иначе.

При повороте вокруг центра равностороннего треугольника ABC на угол 120° точка A переходит в точку C, а точка K в точку L, то есть, отрезок AK переходит в отрезок CL. Следовательно, $\angle AMC = 120^\circ$.

$+$ *приведено верное обоснованное решение*

$\mp$ *доказано только, что $CK = LB$*

10.4. Вася придумал новую шахматную фигуру «супер-слон». Один «супер-слон» (обозначим его A) бьет другого (обозначим его B), если они стоят на одной диагонали, между ними нет фигур, и следующая по диагонали клетка за «супер-слоном» B свободна. Например, на рисунке фигура a бьет фигуру b, но не бьет ни одну из фигур c, d, e, f и g.



Какое наибольшее количество «супер-слонов» можно поставить на шахматную доску так, чтобы каждый из них бился хотя бы одним другим?

Ответ: 32 фигуры.

Пример приведен на рисунке 10.4.

Докажем, что больше 32 фигур разместить не удастся. Заметим сначала, что на крайних клетках доски «супер-слоны» стоять не могут (иначе их никто не бьет).

Разобьем внутренний квадрат 6×6 на четыре квадрата 3×3 (см. рис. 10.4). В каждом из этих квадратов все клетки занятыми быть не могут, поскольку в противном случае «супер-слон», стоящий в центральной клетке маленького квадрата, никем не бьется. Следовательно, можно поставить не более $6 \cdot 6 - 4 = 32$ фигур.

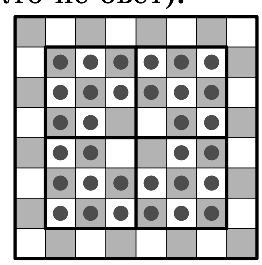


Рис. 10.4

$+$ *приведено верное обоснованное решение*

$\mp$ *приведен только верный пример*

10.5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD||BC$). На дуге AD (не содержащей точек B и C) описанной окружности этой трапеции произвольно выбрана точка M. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из вершин A и D на отрезки BM и CM, лежат на одной окружности.

Пусть K, L, N и S — основания перпендикуляров (см. рис. 10.5). Докажем, что K, L, N и S лежат на одной окружности.

Заметим, что из равенства сторон AB и CD трапеции следует равенство соответствующих дуг, а следовательно и вписанных углов, опирающихся на эти дуги. То есть $\angle AMB = \angle DMC$.

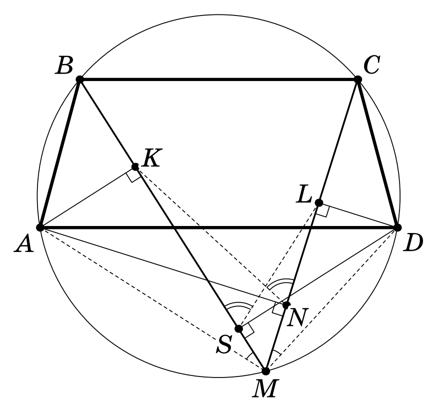


Рис. 10.5

Далее можно рассуждать по-разному:

Первый способ. Так как $\angle AKM = \angle ANM = 90^\circ$, то точки A, K, N и M лежат на одной окружности. Аналогично, точки D, L, S и M лежат на одной окружности.

Используя равенство вписанных углов, получим, что $\angle KNL = 90^\circ - \angle KNA = 90^\circ - \angle KMA = 90^\circ - \angle LMD = 90^\circ - \angle LSD = \angle KSL$, то есть точки K, L, N и S лежат на одной окружности.

Комментарий. Другие случаи расположения точек рассматриваются аналогично.

Второй способ. Заметим, что $\triangle MSD \sim \triangle MNA$ и $\triangle MLD \sim \triangle MKA$ по двум углам. Следовательно, $\frac{MD}{MA} = \frac{MS}{MN}$ и $\frac{MD}{MA} = \frac{ML}{MK}$, то есть $\frac{MS}{MN} = \frac{ML}{MK}$, откуда $ML \cdot MN = MS \cdot MK$.

Используя утверждение, обратное свойству секущих, получим требуемое.

Комментарий для проверяющих. Не предполагается рассмотрение различных случаев расположения оснований перпендикуляров. То есть, за рассмотрение только одного случая оценка не снижается.

$+$ *приведено верное обоснованное решение*

10.6. Даны $n+1$ попарно различных натуральных числа, меньших $2n$ ($n > 1$). Докажите, что среди них найдутся три таких числа, что сумма двух из них равна третьему.

Первый способ. Воспользуемся методом математической индукции.

База. При $n = 2$ выбранными оказываются числа 1, 2, 3. Утверждение задачи верно, поскольку $1 + 2 = 3$.

Переход. Пусть утверждение верно для некоторого значения n. Докажем, что оно верно и для $n + 1$, то есть, среди $n + 2$ натуральных чисел, меньших $2n + 2$, есть три числа таких, что сумма двух из них равна третьему.

Возможны два случая:

1) Среди выбранных чисел нет числа $2n + 1$. Тогда из чисел, меньших $2n$, выбрали по-крайней мере $n + 1$ число (даже, если в наборе есть число $2n$, останется еще $n + 1$ число). Тогда, по предположению индукции, найдутся три числа, сумма которых равна третьему.

2) Среди выбранных чисел есть число $2n + 1$. Разобьем числа 1, 2, ..., $2n$ на пары чисел, в сумме дающих $2n + 1$: 1 и $2n$, 2 и $2n - 1$, ..., n и $n + 1$. Таких пар n. Поскольку в набор входит еще $n + 1$ число, то какая-то из пар входит в набор целиком. Следовательно, числа этой пары и число $2n + 1$ образуют искомую тройку.

Второй способ. Рассмотрим два случая.

1) Среди выбранных чисел есть число $2n - 1$. Разобьем числа 1, 2, ..., $2n - 2$ на пары чисел, в сумме дающих $2n - 1$: 1 и $2n - 2$, 2 и $2n - 3$, ..., $n - 1$ и $n + 1$. Таких пар $n - 1$. Поскольку в набор входит еще n чисел, помимо $2n - 1$, то какая-то из пар входит в набор целиком. Следовательно, числа этой пары и число $2n - 1$ образуют искомую тройку.

2) Среди выбранных чисел нет числа $2n - 1$. Тогда достаточно доказать, что если выбрали n чисел, меньших $2n - 2$, то найдутся три числа, удовлетворяющих условию. Таким образом, задача сводится к аналогичной, но при этом n уменьшится на 1.

Следовательно, мы либо на каком-то шаге найдем нужную тройку, либо дойдем до чисел 1, 2, 3, которые удовлетворяют условию.

$+$ *приведено верное обоснованное решение*

$-$ *решение приведено только для конкретных значений n*