Возможные решения

9 класс

Задача 1. Теория относительности

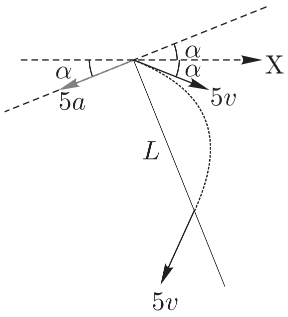

Рис. 16

Перейдём в систему отсчета, связанную с одной из частиц (например, первой). Воспользуемся законом сложения скоростей и ускорений. Так как скорости частиц всё время остаются перпендикулярными (как и ускорения), то мы можем воспользоваться теоремой Пифагора. В итоге получим, что вторая частица начинает движение со скоростью $5v$ и ускорением $5a$ (рис. 16). Пусть вторая частица двигалась вдоль оси OX. В новой системе отсчёта угол α между осью OX и начальной скоростью (и начальным ускорением) найдём из условия перпендикулярности скоростей (и ускорения частиц) в старой системе отсчёта: $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$, $\alpha = 36{,}87°$. По аналогии с задачей о дальности полёта тела, брошенного под углом 2α к вертикали, получим:

$$L = \frac{(5v)^2 \sin 4\alpha}{5a} = \frac{5v^2 \sin 4\alpha}{a} = 500 \text{ м}.$$

Относительная скорость станет минимальной в тот момент, когда вектор скорости окажется перпендикулярным вектору ускорения. Таким образом, $v_{\text{отн(мин)}} = 5v \sin 2\alpha = 48$ м/с.

Задача 2. Дело — труба!

Пусть в первом случае столб воды имеет длину $L_\text{в}$, а столб льда $L_\text{л}$. Тогда:

$$L_\text{в} + L_\text{л} = L_2. \tag{1}$$

Так как масса содержимого между поршнями постоянна:

$$L_\text{в}\rho_\text{в} + L_\text{л}\rho_\text{л} = L_1\rho_\text{в}. \tag{2}$$

Поскольку тепловые потоки через лёд и воду равны, то:

$$\frac{kS(t_2 - t_0)}{L_\text{в}} = \frac{4kS(t_0 - t_1)}{L_\text{л}}, \quad \text{где} \quad t_0 = 0\,°\text{C}. \tag{3}$$

Из уравнения (3), с учетом заданных температур находим, что $L_\text{л} = 10L_\text{в}$. Из уравнений (1) и (2) получим: $L_\text{в} = 8$ см, и $L_2 = 11L_\text{в} = 88$ см.

Тепловой поток P через каждое сечение одинаков:

$$P = \frac{kS(t_2' - t_1')}{\Delta L},$$

где t_1', t_2' — температуры слева и справа от фрагмента цилиндра длиной ΔL. Отсюда $t_2' - t_1' = (P\Delta L)/(kS)$, то есть $\Delta t \sim \Delta L$. Это означает, что температура льда и воды от поршня до границы раздела изменяется по линейному закону, поэтому можно считать, что соответствующие части системы имеют среднюю температуру (лёд $t_\text{л} = -20\,°\text{C}$, вода $t_\text{в} = 8\,°\text{C}$). После того как систему теплоизолировали, между поршнями устанавливается тепловое равновесие с некоторой температурой t. При охлаждении воды до температуры плавления *выделится* количество теплоты

$$Q_1 = L_\text{в}S\rho_\text{в}c_\text{в}t_\text{в} = 33\,600\,L_\text{в}S\rho_\text{в}.$$

Для нагревания льда до температуры плавления *потребуется* количество теплоты

$$Q_2 = 10L_\text{в}S0{,}9\rho_\text{в}c_\text{л}(0 - t_\text{л}) = 378\,000\,L_\text{в}S\rho_\text{в}.$$

Следовательно, вода точно охладится до 0°C и начнет замерзать. При замерзании выделится количество теплоты

$$Q_3 = \lambda L_\text{в}S\rho_\text{в} = 330\,000\,L_\text{в}S\rho_\text{в}.$$

Этого тепла не хватит, чтобы нагреть лед до температуры плавления. Следовательно, вся вода замерзнет. Тогда:

$$L_3 = \frac{10}{9}L_1 \approx 88{,}9 \text{ см}.$$

Задача 3. Бусинка на кольце

В силу симметрии системы, при движении бусинок кольцо не будет смещаться по горизонтали. Для отрыва кольца от плоскости необходимо, чтобы $N_1 = 0$ (рис. 17). Это возможно, если силы реакции со стороны бусинок на кольцо N направлены от центра. К этому моменту времени каждая из бусинок сместится от вертикали на угол α (рис. 18). Тогда по второму закону Ньютона для каждой из них будет справедливо соотношение:

$$m\frac{v^2}{R} = N + mg\cos\alpha,$$

где N — сила, действующая на бусинку со стороны кольца.

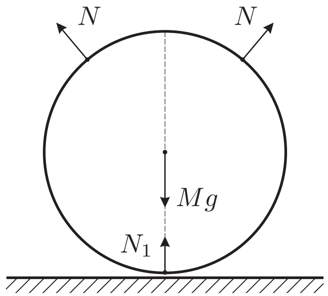

Рис. 17

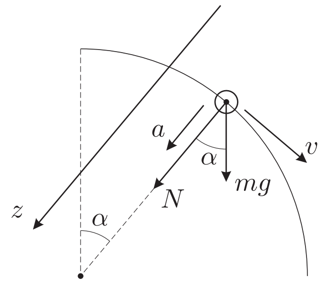

Рис. 18

Согласно закону сохранения энергии, верно равенство:

$$m\frac{v^2}{2} = mgR(1-\cos\alpha).$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$N = mg(2-3\cos\alpha).$$

Для момента отрыва кольца:

$$2N\cos\alpha = Mg.$$

Из полученного выражения можно найти отношение m/M:

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{2(2\cos\alpha - 3\cos^2\alpha)}.$$

В знаменателе квадратичная зависимость с максимумом при $\cos\alpha = 1/3$, при этом $m/M = 3/2$. Следовательно, отрыв происходит при

$$\frac{m}{M} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Задача 4. Лёд в лучах лазера

Расставим силы натяжения нитей (рис. 19). Заметим, что из условия равновесия висящей льдинки:

$$T = mg. \tag{4}$$

По мере уменьшения её массы пропорционально будет уменьшаться сила натяжения всех нитей в системе. Поэтому сила натяжения нити, удерживающей $6m$, изменяется от 0 до $2mg$.

Изменение уровня воды в стакане можно связать с изменением внешней силы, действующей на систему со стороны штатива.

Найдём силу, действующую на дно стакана со стороны содержимого, двумя разными способами, с учётом того, что масса системы (льда, воды, блоков, нитей) при этом не изменяется:

1. Как силу, обратную действующей по третьему закону Ньютона на содержимое со стороны дна, найденную из условия равновесия содержимого:

$$8T + F_{\text{на дно}} = m_{\text{системы}}g,$$

что с учётом уравнения (4) даст:

$$8mg + F_{\text{на дно}} = m_{\text{системы}}g.$$

2. Как сумму реальных сил, с которыми содержимое действует на дно:

$$F_{\text{на дно}} = \rho g h S,$$

где $F_{\text{на дно}}$ — сила гидростатического давления (дна ничто не касается). После сообщения льдинке количества теплоты Q её масса уменьшается на $\Delta m = Q/\lambda$. Уравнения для новой силы, действующей на дно, примут вид:

$$8(m-\Delta m)g + F^*_{\text{на дно}} = m_{\text{системы}}g,$$

$$F^*_{\text{на дно}} = \rho g S(h+\Delta h_1).$$

Приравнивая уравнения по массе всего содержимого, получим:

$$\rho g S\Delta h_1 = 8\Delta m \tag{5}$$

или $\rho g S\Delta h_1 = 8Q/\lambda$, откуда находим площадь дна стакана:

$$S = \frac{8Q}{\Delta h_1 \rho\lambda} = 20\ \text{см}^2.$$

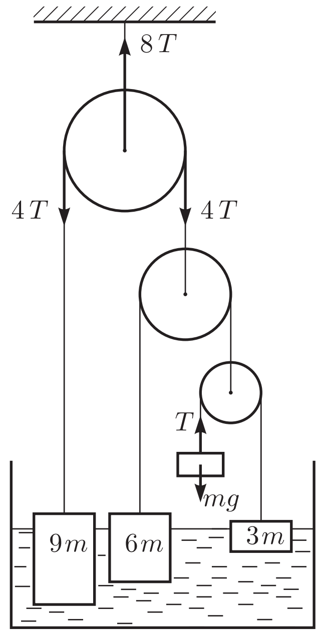

Рис. 19

Заметим, что знак Δh_1 положительный, следовательно, уровень поднимается. Из уравнения (5) видно, что высота уровня будет линейно увеличиваться по мере уменьшения массы висящей льдинки. После полного плавления, система уравнений для силы на дно примет вид:

$$\begin{cases} F^{**}_{\text{на дно}} = m_{\text{системы}}g, \\ F^{**}_{\text{на дно}} = \rho g S(h+\Delta h_2). \end{cases}$$

Откуда $\rho S\Delta h_2 = 8m$, и диапазон изменения силы натяжения нити, прикреплённой к $6m$, составит $0 < T < \rho g S\Delta h_2/4$, или $0 < T < 0{,}15$ Н.

Задача 5. Реостатика

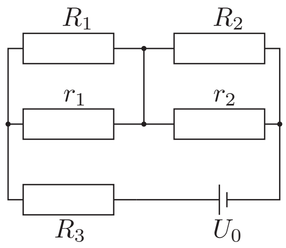

Рис. 20

1. Из графика следует, что при $x = 0{,}2$ м ток через амперметр не идёт. Поскольку сопротивление однородного проводника постоянной площади пропорционально длине, отношение сопротивлений $r_1 : r_2 = 1 : 4$ (рис. 20). При этом, токи через резисторы R_1 и R_2 равны, и отношение напряжений U_1 и U_2 на сопротивлениях R_1 и R_2 составляет $U_1 : U_2 = R_1 : R_2$. Аналогично, из совпадения токов через резисторы r_1 и r_2 находим $U_1 : U_2 = r_1 : r_2$. Отсюда:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{4}.$$

2. Общее сопротивление параллельно соединённых резисторов R_1 и r_1 не превосходит r_1, а параллельно соединённых резисторов R_2 и r_2 — не превосходит r_2. Следовательно, цепь, состоящая из четырех резисторов R_1, r_1, R_2 и r_2, не может иметь сопротивление больше $r_1 + r_2 = 1$ кОм. Поэтому общее сопротивление всей цепи с учетом сопротивления R_3 будет лежать в интервале от 1 МОм до 1,001 МОм.

Таким образом, с точностью не более 0,1% сила тока через источник напряжения будет равна $I_0 = U_0/R_3$ на протяжении всего опыта — график Глюка для показания амперметра A_2 был бы на глаз неотличим от горизонтальной прямой.

3. Когда амперметр находится в положении 1, и через него проходит ток $I_1 = |I_A| = 2$ мкА, напряжение на реостате r составляет $(I_0 - I_1)r$, а напряжение на резисторе R_2 равно I_1R_2. Отсюда $(I_0 - I_1)r = I_1R_2$.

Когда амперметр находится в положении 2, и через него проходит ток $I_2 = |I_A| = 3$ мкА, напряжение на реостате r составляет $(I_0 - I_2)r$, а напряжение на резисторе R_1 равно I_2R_1. Отсюда $(I_0 - I_2)r = I_2R_1$.

Разделив полученные соотношения друг на друга и использовав свойство $R_2/R_1 = 4$, находим: $(I_0 - I_1) : (I_0 - I_2) = 4I_1 : I_2$. Таким образом, $I_0 = 3{,}6$ мкА, откуда с учётом предыдущих соотношений следует:

$$R_1 = 0{,}2 \text{ кОм}, \qquad R_2 = 0{,}8 \text{ кОм}, \qquad U_0 = I_0R_3 = 3{,}6 \text{ В}.$$