Условия и решения задач

9 класс

9.5. По кругу расставлено $2n$ действительных чисел, сумма которых положительна. Для каждого из них рассмотрим обе группы из n подряд стоящих чисел, в которых это число является крайним. Докажите, что найдется число, для которого сумма чисел в каждой из двух таких групп положительна. (*А. Грибалко*)

Решение. Обозначим данные числа в порядке обхода по часовой стрелке через $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$; обозначим через $S > 0$ сумму всех чисел, и положим $S_i = a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+n-1}$ (все индексы рассматриваются по модулю $2n$, так что $a_{2n+i} = a_i$ и $S_{2n+i} = S_i$). Тогда нам надо доказать, что при некотором i обе суммы S_i и S_{i+1-n} положительны. Заметим, что $S_i + S_{n+i} = S > 0$, так что среди чисел S_i есть положительные.

Если все суммы S_i положительны, то любой индекс i подходит. В противном случае найдётся такой индекс i, что $S_i > 0$, а $S_{i+1} \leqslant 0$. Тогда $S_{i+1-n} = S - S_{i+1} > 0$, и индекс i — искомый.

9.6. Петя и Вася придумали десять квадратных трёхчленов. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из трёхчленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать? (*А. Голованов*)

Ответ. 20 чисел.

Решение. Покажем, что в каждый трёхчлен $P(x)$ Петя мог подставить не более двух чисел. Действительно, пусть n-й член получившейся арифметической прогрессии равен $an + b$, а n-е из Васиных последовательных чисел равно $k + n$. Тогда Петя мог подставить это число в $P(x)$, если $P(k + n) = an + b$, а это квадратное уравнение относительно n имеет не более двух корней.

Поэтому всего чисел не могло быть больше 20. Осталось показать, что 20 чисел могли получиться. Пусть, например, были выбраны трёхчлены $P_k(x) = (x - (2k-1))(x - 2k) + x$ при $k = 1, 2, \ldots, 10$, и Вася называл числа 1, 2, ..., 20. Так как $P_k(2k-1) = 2k-1$ и $P_k(2k) = 2k$, то у Пети могли получаться последовательно числа 1, 2, ..., 20.

9.7. На сторонах остроугольного треугольника ABC вне него построены квадраты $CAKL$ и $CBMN$. Прямая CN пересекает отрезок AK в точке X, а прямая CL пересекает отрезок BM в точке Y. Точка P, лежащая внутри треугольника ABC, является точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников KXN и LYM. Точка S — середина отрезка AB. Докажите, что $\angle ACS = \angle BCP$. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть Q — точка пересечения прямых KL и MN (см. рис. 1). Поскольку $\angle QLC = \angle NMY = 90°$, четырёхугольник $QLYM$ — вписанный. Аналогично, четырёхугольник $QNXK$ — вписанный. Тем самым, Q — вторая точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2, описанных около треугольников KXN и LYM соответственно.

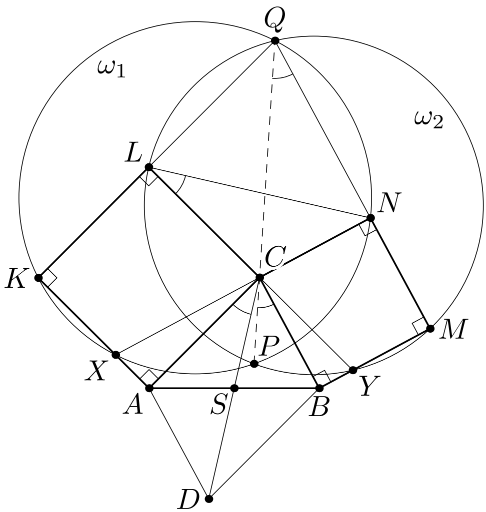
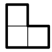


Рис. 1

Докажем, что C лежит на прямой PQ. Прямоугольные треугольники CAX и CBY подобны, так как $\angle XCA = 90^\circ - \angle ACB = \angle YCB$. Отсюда $XC \cdot CB = YC \cdot CA$ или $XC \cdot CN = YC \cdot CL$, то есть *степени* точки C относительно окружностей ω_1 и ω_2 равны, значит, C лежит на их *радикальной оси* PQ. (Чтобы доказать это без использования радикальных осей, достаточно отложить на прямой CP за точку C отрезок CQ' такой, что $CQ' \cdot CP = XC \cdot CN = YC \cdot CL$. Из равенств произведений вытекает, что Q' лежит на каждой из окружностей ω_1 и ω_2, то есть $Q' = Q$.)

Продлив медиану CS на её длину, достроим треугольник ABC до параллелограмма $ACBD$. Так как $\angle CAD = 180^\circ - \angle ACB = \angle LCN$, $CA = CL$ и $AD = CB = CN$, треугольники CAD и LCN равны. Отсюда $\angle ACS = \angle ACD = \angle CLN$. Так как четырёхугольник $QLCN$ вписанный ($\angle QLC = \angle QNC = 90^\circ$), то $\angle CLN = \angle CQN = \angle PCB$ (поскольку $BC \parallel MN$). Итак, $\angle ACS = \angle CLN = \angle PCB$, что и требовалось доказать.

Замечание. Можно показать, что треугольники PAC и PCB подобны; так что P — центр *поворотной гомотетии*, переводящей квадрат $AKLC$ в квадрат $CNMB$.

9.8. Из клетчатого квадрата 55×55 вырезали по границам клеток 400 трёхклеточных уголков  (повёрнутых как угодно) и ещё 500 клеток. Докажите, что какие-то две вырезанные фигуры имеют общий отрезок границы. (*С. Берлов*)

Решение. Первое решение. Добавим к каждой фигуре такую каёмку, как показано на рис. 2. Предположим, что вырезанные фигуры не имеют общих сторон. Тогда фигуры с добавленными каёмками не накладываются друг на друга. Действительно, каёмка фигурки F состоит ровно из тех точек, расстояние от которых до F не больше, чем расстояние до любой клетки, не имеющей общих сторон с F. Значит, если точка X лежит в каёмках двух фигурок (не имеющих общих сторон), то расстояние от X до первой фигурки не больше, чем до второй, и одновременно не меньше, чем до второй. Тогда эти расстояния равны, то есть X лежит на границах обеих каёмок.

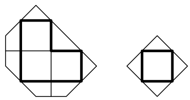


Рис. 2

Таким образом, фигуры с каёмками не должны перекрываться. Далее, площадь «уголка» с каёмкой равна $\frac{11}{2}$, а площадь клетки с каёмкой равна 2. Так как вырезано 400 «уголков» и 500 клеток, то суммарная площадь этих фигур с каёмками составит $2200 + 1000 = 3200$. Но все эти фигуры с каёмками лежат в квадрате 56×56 с тем же центром, что и исходный. Площадь этого квадрата равна $3136 < 3200$: значит, каёмки не могут не накладываться.

Второе решение. Опять же предположим, что фигуры не имеют общих сторон. Рассмотрим квадрат до вырезания, нарисуем все стороны клеточек вырезанных фигур, и к каждому «уголку» добавим две половинки сторон клеток, как показано на рис. 3. Заметим, что сторона клетки, половина которой добавлена, не может принадлежать никакой другой фигуре. Отсюда легко видеть, что никакие нарисованные отрезки не накладываются.

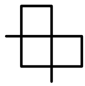


Рис. 3

Заметим, что для каждого «уголка» мы нарисовали отрезки суммарной длины 11, а для клетки — суммарной длины 4. Значит, суммарная длина всех нарисованных отрезков равна $4400 + 2000 = 6400$. С другой стороны, все эти отрезки лежат на 56 горизонтальных отрезках длины 56 (выступающих за квадрат на $\frac{1}{2}$ в обе стороны) и 56 аналогичных вертикальных отрезках; значит, их суммарная длина не больше $2 \cdot 56^2 = 6272 < 6400$. Противоречие.

Замечание 1. Оценку из второго решения можно немного уточнить, заметив, что за левую сторону квадрата отрезок может выступать не чаще, чем в каждой третьей горизонтали; то же верно и для других сторон.

Замечание 2. Подобная оценка близка к точной для любого квадрата. Действительно, на клетчатой плоскости можно разместить «уголки» и клетки так, как показано на рис. 4; в любом достаточно большом квадрате количества попавших в него «уголков» и клеток будут относиться примерно как $4 : 5$. При этом вся плоскость разбивается на каёмки из первого решения,

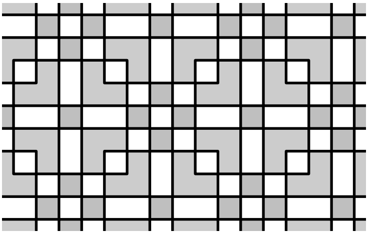


Рис. 4

а все стороны клеток разбиваются на отрезки из второго решения.