11 класс

11.5. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть $a_0 < a_1 < \ldots < a_{100}$ — выбранные числа, упорядоченные по возрастанию. Сумма десяти разностей $a_{10} - a_0, a_{20} - a_{10}, \ldots, a_{100} - a_{90}$ равна $a_{100} - a_0 \leqslant 1000$, поэтому одна из этих разностей не превосходит 100. Пусть это разность $a_{10i+10} - a_{10i}$; тогда

$$0 < a_{10i+1} - a_{10i} < a_{10i+2} - a_{10i} < \ldots < a_{10i+10} - a_{10i} \leqslant 100,$$

и мы предъявили 10 требуемых разностей.

Замечание. Если выбрать из чисел от 0 до 1000 все числа, делящиеся на 10, то среди модулей их попарных разностей не найдётся десяти различных, не превосходящих 99.

11.6. Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $2(a + b + c + d) \geqslant abcd$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant abcd$. (*А. Храбров*)

Решение. Возможны два случая.

Случай 1. Предположим, что $abcd \geqslant 16$. Тогда по неравенству между средними квадратичным и арифметическим имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \geqslant \geqslant 4\left(\frac{abcd}{8}\right)^2 = \frac{(abcd)^2}{16} \geqslant abcd,$$

что и требовалось доказать.

Случай 2. Пусть теперь $abcd < 16$. Тогда по неравенству между средними арифметическим и геометрическим имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = \sqrt{16abcd} > \sqrt{a^2b^2c^2d^2} = abcd,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Утверждение задачи остаётся верным для произвольных (не обязательно положительных) действительных чисел a, b, c, d.

11.7. Глава Монетного двора хочет выпустить монеты 12 номиналов (каждый — в натуральное число рублей) так, чтобы любую сумму от 1 до 6543 рублей можно было заплатить без сдачи, используя не более 8 монет. Сможет ли он это сделать? (При уплате суммы можно использовать несколько монет одного номинала.)

(*О. Подлипский*)

Ответ. Сможет.

Решение. Заметим, что $9^4 = 6561 > 6543$. Покажем, что можно выбрать 12 номиналов так, чтобы с помощью не более чем 8 монет можно было уплатить без сдачи любую сумму от 1 до 6560 рублей.

Покажем сначала, как выпустить монеты трёх номиналов, чтобы с помощью не более чем двух монет можно было уплатить без сдачи любую сумму от 1 до 8 рублей. Пусть номиналы равняются 1, 3 и 4 рублям. Тогда $1 = 1$, $2 = 1+1$, $3 = 3$, $4 = 4$, $5 = 4+1$, $6 = 3+3$, $7 = 4+3$ и $8 = 4+4$.

Пусть теперь Монетный двор изготовит монеты с номиналами 9^k, $3 \cdot 9^k$ и $4 \cdot 9^k$ рублей при $k = 0, 1, 2, 3$. Любое число N от 1 до 6560 единственным образом представляется в виде $N = a_3 \cdot 9^3 + a_2 \cdot 9^2 + a_1 \cdot 9 + a_0$, где числа a_k могут принимать значения от 0 до 8. (Фактически, это разложение числа N в девятеричной системе счисления.) Как показано выше, сумма $a_k \cdot 9^k$ может быть получена не более чем двумя монетами. Таким образом, вся сумма N может быть получена не более чем $4 \cdot 2 = 8$ монетами указанных номиналов, что и требовалось.

11.8. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I. Около треугольника AIB описана окружность Γ. Окружности ω и Γ пересекаются в точках X и Y. Общие касательные к окружностям ω и Γ пересекаются в точке Z. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и XYZ, касаются.

(*С. Ильясов*)

Решение. Обозначим окружность, описанную около треугольника ABC, через Ω. Пусть биссектриса CI пересекает Ω повторно в точке S. Тогда, как известно, $SA = SB = SI$, то есть точка S — центр окружности Γ. Из симметрии, точка Z лежит на прямой SC.

Пусть общие касательные к окружностям ω и Γ касаются Γ в точках M и N (см. рис. 10). Линия центров SI яв-

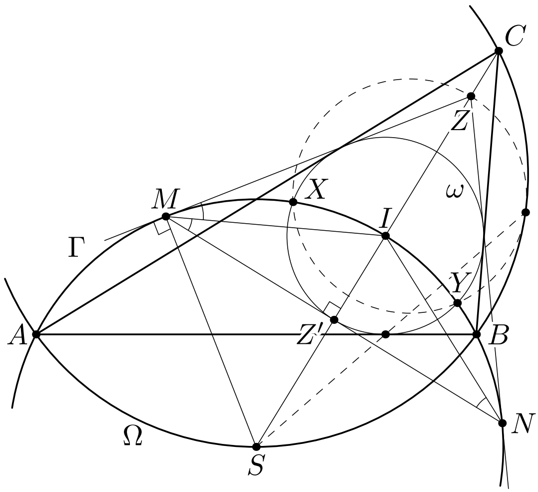

Рис. 10

ляется серединным перпендикуляром к отрезку MN, поэтому $\angle IMN = \angle INM = \angle IMZ$ (последнее равенство верно, поскольку прямая MZ касается Γ). Значит, MI — биссектриса угла ZMN, то есть расстояния от I до ZM и MN равны. Поскольку ω касается ZM, она также касается прямой MN в некоторой точке Z'; из симметрии, эта точка лежит на SI.

Прямоугольные треугольники $SZ'M$ и SMZ подобны, поэтому $SZ \cdot SZ' = SM^2$. Это означает, что при инверсии относительно окружности Γ точка Z' перейдет в точку Z. Значит, окружность ω, содержащая точки X, Y и Z', перейдёт в окружность, описанную около треугольника XYZ. Далее, при такой инверсии прямая AB переходит в окружность Ω. Поскольку ω и AB касаются, их образы также будут касаться, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Тот факт, что окружность, описанная около XYZ, переходит в ω при инверсии относительно Γ, можно доказать и по-другому. Обозначим через r и ρ радиусы окружностей ω и Γ; пусть Z' — точка пересечения отрезка IS с ω. Тогда $SZ' = \rho - r$. С другой стороны, из гомотетии с центром в Z, переводящей ω в Γ, имеем $\frac{r}{\rho} = \frac{ZI}{ZS} = 1 - \frac{\rho}{ZS}$, откуда $SZ = \frac{\rho^2}{\rho - r}$. Значит, $SZ \cdot SZ' = \rho^2$.

Замечание 2. Другое решение можно получить, сделав инверсию относительно окружности ω. При этой инверсии: точки A, B, C переходят в середины A'', B'', C'' сторон $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ треугольника с вершинами в точках касания ω со сторонами; окружность Γ переходит в прямую XY, которая содержит среднюю линию $A''B''$ треугольника $A'B'C'$; описанная окружность треугольника XYZ переходит в окружность ω', симметричную ω относительно XY. Значит, надо доказать, что ω' касается окружности, описанной около треугольника $A''B''C''$. А это верно, поскольку при симметрии относительно XY последняя окружность переходит в окружность, описанную около $A''B''C'$, которая касается ω.