10 класс

10.1. Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x-a)(x-b)=x-c$, $(x-b)(x-c)= x-a$, $(x-c)(x-a)=x-b$ имеют решение. (*И. Богданов*)

Первое решение. Обозначим $f_1(x)=(x-b)(x-c)-(x-a)$, $f_2(x)=(x-c)(x-a)-(x-b)$ и $f_3(x)=(x-a)(x-b)-(x-c)$. Предположим, что утверждение задачи неверно, то есть максимум у одной из этих функций есть корень. Значит, две из них — скажем, f_1 и f_2 — корней не имеют. Поскольку старшие коэффициенты этих квадратных многочленов положительны, получаем, что $f_1(x)>0$ и $f_2(x)>0$ при всех x. Однако многочлен

$$f_1(x)+f_2(x)=(x-c)(x-b+x-a)-(x-a+x-b)= \\ =(2x-a-b)(x-c-1)$$

имеет, например, корень $x_0=c+1$; значит, неверно, что $f_1(x_0)>0$ и $f_2(x_0)>0$. Противоречие.

Второе решение. Пусть для определённости $a<b<c$. Рассмотрим графики функций $f_{bc}(x)=(x-b)(x-c)$ и $f_a(x)= x-a$. При $x=a$ точка первого графика выше точки второго: $f_{bc}(a)=(a-b)(a-c)>0=f_a(a)$, а при $x=b$ — ниже: $f_{bc}(b)= 0<b-a=f_a(b)$. Значит, уравнение $f_{bc}(x)=f_a(x)$ имеет корень на отрезке $[a,b]$ (см. рис. 4).

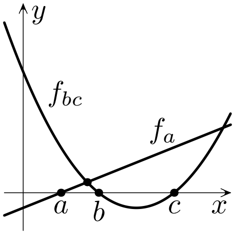

Рис. 4

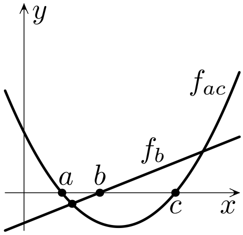

Рис. 5

Аналогично, если рассмотреть графики функций $f_{ac}(x)= (x-a)(x-c)$ и $f_b(x)=x-b$, то получим, что $f_{ac}(a)>f_b(a)$ и $f_{ac}(b)<f_b(b)$, так что уравнение $f_{ac}(x)=f_b(x)$ также имеет корень на отрезке $[a,b]$ (см. рис. 2).

Третье решение. Как и в первом решении, предположим, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не имеют корней. Тогда их дискриминанты отрицательны, то есть $(b+c+1)^2 < 4(bc+a)$ и $(c+a+1)^2 < 4(ca+b)$. Эти неравенства переписываются в виде $(b-c-1)^2 < 4a-4b$ и $(c-a+1)^2 < 4b-4a$. Значит, оба числа в правых частях положительны; однако их сумма равна нулю. Противоречие.

10.2. На окружности отметили n точек, разбивающие её на n дуг. Окружность повернули вокруг центра на угол $2\pi k/n$ (при некотором натуральном k), в результате чего отмеченные точки перешли в n *новых точек*, разбивающих окружность на n *новых дуг*. Докажите, что найдется новая дуга, которая целиком лежит в одной из старых дуг. (Считается, что концы дуги ей принадлежат.) (*И. Митрофанов*)

Решение. Мы будем считать, что радиус окружности равен 1, а поворот происходил по часовой стрелке. Если две новых точки лежат на одной старой дуге, то новая дуга между ними — требуемая. Предположим, что таких новых точек нет. Так как есть n старых дуг и n новых точек, это возможно только в случае, когда на каждой старой дуге лежит ровно по одной новой точке (причём эти точки не совпадают с концами старых дуг).

Занумеруем старые точки по часовой стрелке $A_1, A_2, \ldots, A_n$; пусть при повороте точка A_i переходит в новую точку B_i (мы считаем нумерацию циклической, то есть $A_{n+i} = A_i$ и $B_{n+i} = B_i$). Пусть точка B_1 лежит на дуге A_jA_{j+1}; так как на каждой старой дуге ровно по одной новой точке, соседние точки попадали на соседние дуги. Получаем, что при любом i точка B_i лежит на дуге $A_{j+i-1}A_{j+i}$.

Предположим, что $j \leqslant k$. Заметим, что все дуги вида $A_iA_{i+1}\ldots A_{i+j}$ покрывают окружность ровно в j слоёв; значит, сумма их длин равна $2\pi j \leqslant 2\pi k$. С другой стороны, длина дуги $A_iA_{i+1}\ldots A_{i+j}$ строго больше длины дуги A_iB_i, которая равна $2\pi k/n$; значит, сумма их длин строго больше, чем $n \cdot 2\pi k/n = 2\pi k$; противоречие.

Аналогично, если $j > k$, то сумма длин всех дуг вида $A_iA_{i+1}\ldots A_{i+j-1}$ равна $2\pi(j-1) \geqslant 2\pi k$; с другой стороны, она строго меньше, чем сумма длин дуг вида A_iB_i, которая равна $2\pi k$. Опять получаем противоречие.

10.3. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая). (*В. Сендеров*)

Ответ. $k = 1$.

Решение. Пусть $n \geqslant 2$, и $2 = p_1 < \ldots < p_k$ — первые k простых чисел. Предположим, что

$$p_1p_2\ldots p_k = a^n + 1. \qquad (*)$$

Если $a = 1$, то $a^n + 1 = 2$ и, следовательно, $k = 1$.

Предположим теперь, что $a > 1$; тогда $k > 1$. Число a нечётно, поэтому у него существует нечётный простой делитель q. Тогда $q > p_k$, иначе левая часть равенства $(*)$ делилась бы на q, что невозможно. Поэтому и $a > p_k$.

Без ограничения общности можно считать, что n — простое число (если $n = st$, то можно заменить n на t, а a — на a^s). Заметим, что $n > 2$, поскольку a^2+1 не может делиться на $3 = p_2$.

Покажем теперь, что $n > p_k$. В противном случае имеем $n = p_i$ при некотором $1 < i \leqslant k$. Тогда $a^{p_i} + 1 \,\vdots\, p_i$; с другой стороны, по малой теореме Ферма $a^{p_i} - a \,\vdots\, p_i$. Значит, число $a + 1 = (a^{p_i} + 1) - (a^{p_i} - a)$ также делится на p_i. Заметим, что $1 + a^{p_i} = (1 + a)(1 - a + \ldots + a^{p_i-1})$, где $a + 1 \,\vdots\, p_i$ и

$$1 - a + \ldots + a^{p_i-1} \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 = p_i \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Значит, число $1+a^{p_i}$ делится на p_i^2, что невозможно по условию.

Итак, $a > p_k$ и $n > p_k$, откуда $a^n + 1 > p_k^{p_k} > p_1p_2\ldots p_k$, что противоречит равенству $(*)$.

10.4. Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены такие точки P и Q, что $\angle PDC + \angle PCB = \angle PAB + \angle PBC = \angle QCD + \angle QDA = \angle QBA + \angle QAD = 90^\circ$. Докажите, что прямая PQ образует равные углы с прямыми AD и BC.

(*А. Пастор*)

Решение. Обозначим окружности, описанные около четырёхугольника $ABCD$ и треугольников ABP, CDP, ABQ, CDQ через Ω, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 соответственно (см. рис. 6).

Пусть X — проекция P на BC; обозначим прямую PX че-

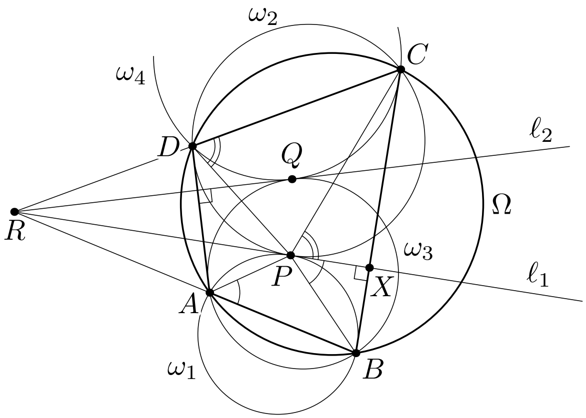

Рис. 6

рез ℓ_1. Тогда $\angle BPX = 90^\circ - \angle PBC = \angle PAB$; значит, прямая ℓ_1 касается окружности ω_1. Аналогично, ℓ_1 касается окружности ω_2; итак, прямая ℓ_1 и окружности ω_1, ω_2 касаются в точке P. Аналогично получаем, что прямая ℓ_2, проходящая через Q и перпендикулярная AD, и окружности ω_3 и ω_4 касаются в точке Q.

Предположим, что прямые AB и CD пересекаются в некоторой точке R. Покажем, что прямая RP совпадает с ℓ_1. Обозначим через P_1 и P_2 вторые точки пересечения прямой RP с ω_1 и ω_2 (таким образом, $P_1 = P$, если RP касается ω_1; аналогично для P_2). Тогда $RP \cdot RP_1 = RA \cdot RB = RD \cdot RC = RP \cdot RP_2$, то есть $P_1 = P_2$. Так как P — единственная общая точка ω_1 и ω_2, то $P_1 = P_2 = P$. Значит, RP совпадает с ℓ_1, т.е. $RP^2 = RA \cdot RB$.

Аналогично можно показать, что RQ совпадает с ℓ_2, и $RQ^2 = RA \cdot RB$. Следовательно, $RP^2 = RA \cdot RB = RQ^2$, то есть треугольник PQR — равнобедренный и его основание PQ образует равные углы с прямыми QR и PR, а значит — и с перпендикулярными им прямыми AD и BC.

Осталось рассмотреть случай, когда стороны AB и CD параллельны. В этом случае четырёхугольник $ABCD$ является равнобокой трапецией или прямоугольником. Этот четырёхугольник и все рассматриваемые окружности симметричны относительно общего серединного перпендикуляра к AB и CD.

Следовательно, точки P и Q лежат на этой прямой, а она, очевидно, образует равные углы с прямыми AD и BC.

Замечание. В данной конструкции R — общий радикальный центр (то есть точка пересечения попарных радикальных осей) окружностей Ω, ω_1, ω_2, ω_3 и ω_4.