ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

IX. 1 ОРИОН НА ГОРИЗОНТЕ

О.С. Угольников

? Созвездие Ориона занимает область неба со склонением от –11° до +23°. На каких широтах на Земле это созвездие постоянно находится на горизонте (часть созвездия – над горизонтом, часть – под ним)? Атмосферной рефракцией пренебречь.

! Так как экваториальное созвездие Ориона имеет примерно прямоугольную форму и занимает сравнительно небольшой интервал по прямым восхождениям, описанная в условии ситуация может иметь место, если в созвездии есть как невосходящие, так и незаходящие точки. Очевидно, что решение имеет смысл искать вблизи полюсов Земли. Рассмотрим окрестности Северного полюса. Пусть δ_1 – склонение самой северной точки созвездия, δ_2 – склонение самой южной его точки. Запишем условие, при котором нижняя кульминация первой точки будет над горизонтом, а верхняя кульминация второй точки – под горизонтом:

$$h_{\text{Н}1} = -90° + \varphi + \delta_1 > 0,$$
$$h_{\text{В}2} = 90° - \varphi + \delta_2 < 0.$$

Решая эту систему неравенств, получаем ограничение для широты: $\varphi > 67°$ из первого неравенства и $\varphi > 79°$ из второго неравенства. В итоге, в северной полярной области условие задачи будет выполнено за параллелью 79° с.ш. Чтобы получить решение в южном полушарии, нужно, напротив, записать уравнение для высоты верхней кульминации точки со склонением δ_1 и высоты нижней кульминации точки со склонением δ_2:

$$h_{\text{В}1} = 90° + \varphi - \delta_1 < 0,$$
$$h_{\text{Н}2} = -90° - \varphi - \delta_2 > 0.$$

В итоге мы получаем: $\varphi < -79°$. Этот ответ можно было получить сразу, указав, что раз созвездие Ориона находится на горизонте вблизи Северного полюса, на широте больше 79°, то оно будет также находиться на горизонте в противоположной точке Земли с такой же по модулю отрицательной широтой. В итоге, условие задачи выполняется на широтах от –90° до –79° и от +79° до +90°.

IX/X. 2 ШАГОВЫЙ ДВИГАТЕЛЬ

А.М. Татарников

? На экваториальной монтировке установлен шаговый двигатель, отвечающий за суточное ведение телескопа. Угол, на который поворачивается ось двигателя при шаге, составляет 2°. С какой частотой надо осуществлять шаги, если для передачи вращения от оси двигателя на полярную ось телескопа используется два последовательно установленных редуктора (системы шестеренок, уменьшающих угловую скорость) – основной с передаточным числом 1:360 и дополнительный с передаточным числом 1:5?

! Обозначим угол поворота оси двигателя при шаге как γ. Полярная ось телескопа присоединена к двигателю через два редуктора с передаточными числами k_1 и k_2. Угол, на который при шаге повернется телескоп, составит $\gamma \cdot k_1 k_2$ (это составит 4″). Частота шагов ν должна быть такой, чтобы получившаяся угловая скорость была равна угловой скорости вращения Земли (или видимого вращения небесной сферы):

$$\nu \cdot \gamma \cdot k_1 \cdot k_2 = \omega = 360°/T.$$

Здесь T – период вращения Земли (звездные сутки). Отсюда получаем выражение для частоты:

$$\nu = \frac{360^{\circ}}{\gamma\, k_1 k_2 T} = 3.76 \text{ Гц}.$$

IX. 3 ДАЛЕКИЙ КОРАБЛЬ

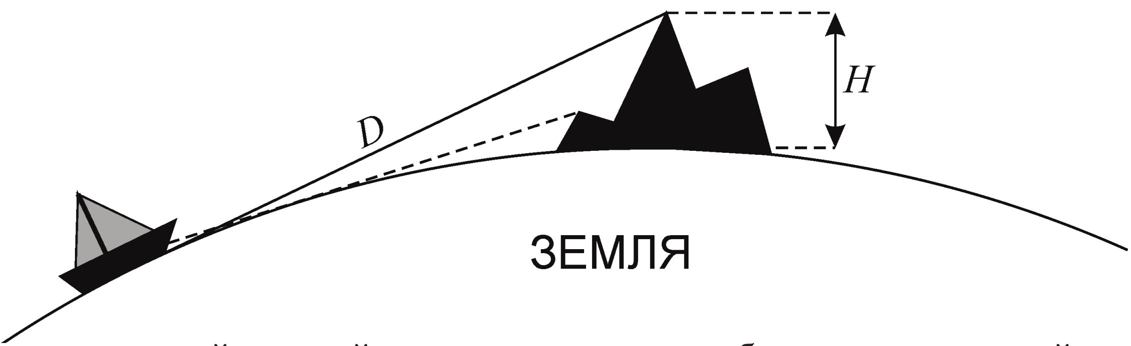
О.С. Угольников

? Находясь на вершине горы над морем, наблюдатель видит небольшой корабль у горизонта. Различая форму корабля, он видит, что его нижняя надводная часть скрыта за горизонтом. Найдите максимально возможную высоту горы, если размер корабля составляет 20 метров. Атмосферной рефракцией и искажениями пренебречь.

! Предел углового разрешения человеческого глаза составляет примерно 1′. Раз наблюдатель различает форму корабля, его угловой размер должен быть в несколько раз (можно считать, в 3 раза) больше, то есть не меньше 3′ или 10^{-3} радиан. Это может быть, если расстояние до корабля D не больше его размеров, умноженных на 1000, то есть 20 километров.

Определим предельную высоту горы H, с которой поверхность воды у корабля будет видна на самом горизонте:

$$H = \sqrt{R^2 + D^2} - R \approx \frac{D^2}{2R} = 30 \text{ м}.$$



Это и есть искомый верхний предел, так как при наблюдении с меньшей высоты нижняя часть корабля не будет видна над морем, а с большей высоты корабль будет полностью виден ближе видимого горизонта.

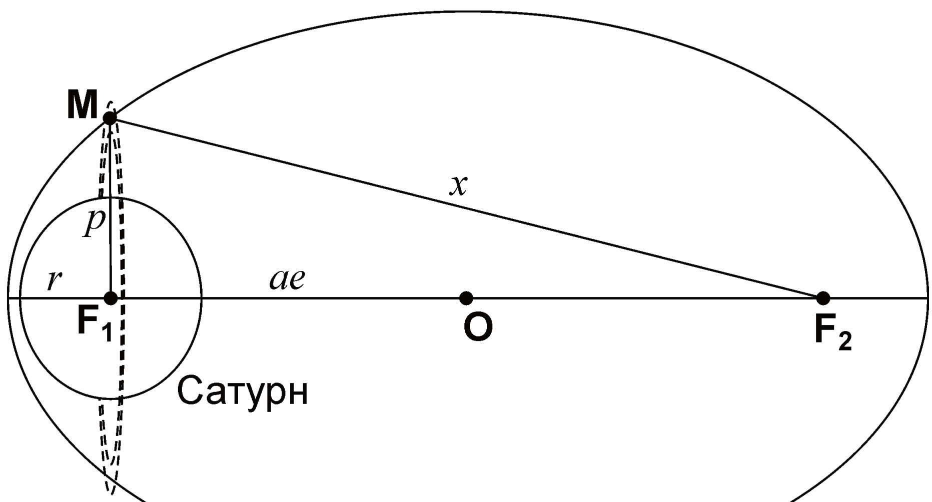
IX/X - 4 СКВОЗЬ КОЛЬЦА САТУРНА

Е.Н. Фадеев

? Космический корабль прошел точку перисатурния над полюсом Сатурна на расстоянии его экваториального радиуса от центра планеты, после чего пролетел сквозь щель Энке (радиус 1.34·10⁵ км) в кольцах. Определите расстояние апосатурния этого корабля. Останется ли аппарат искусственным спутником Сатурна?

***10 класс*: Решить задачу также для аппарата, пролетающего сквозь щель Гюйгенса (радиус 1.17·10⁵ км).**

! Как известно, из-за быстрого вращения планета Сатурн заметно сжата, ее полярный радиус на 10% меньше экваториального. Поэтому корабль мог пролетететь над полюсом на столь близком расстоянии от центра планеты. Он двигался относительно Сатурна по одному из конических сечений: эллипсу, параболе или гиперболе. Предположим, что корабль двигался по эллипсу. Кольца Сатурна расположены в плоскости его экватора. Поэтому в этом эллипсе нам известно расстояние перисатурния r и фокальный параметр p – длина отрезка, перпендикулярного большой оси эллипса, соединяющего фокус $\mathbf{F_1}$ с точкой эллипса **M**.



Расстояние перисатурния r есть $a(1-e)$, а расстояние от каждого из фокусов эллипса до его центра (точка **O**) равно ae, где a – большая полуось эллипса, e – его эксцентриситет. Сумма расстояний от каждой точки эллипса до его фокусов равна $2a$. Это относится и к точке **M**, в которой аппарат пролетел сквозь щель в кольцах:

$$2a = p + x = p + \sqrt{p^2 + 4a^2e^2}.$$

Решая это уравнение, мы получаем:

$$p = a\,(1 - e^2) = r\,(1 + e),$$
$$e = (p/r) - 1.$$

Подставляя в качестве p радиус щели Энке, получаем величину e, равную примерно 1.2. Таким образом, эта орбита не является эллиптической, и аппарат покинет окрестности Сатурна.

Далее – только для 10 класса:

Второй аппарат, пролетевший через щель Гюйгенса, действительно двигается по эллиптической орбите с эксцентриситетом 0.94. Расстояние апосатурния этого корабля составит:

$$R = a\,(1+e) = r\,\frac{1+e}{1-e} = \frac{rp}{2r-p}.$$

Получается, что аппарат, прошедший через щель Гюйгенса, должен удалиться от Сатурна на $1.96 \cdot 10^6$ км. На таком, и даже на большем расстоянии располагаются естественные спутники планеты. Значит, такой аппарат останется спутником Сатурна.

IX. 5 КРУГОВЫЕ ОРБИТЫ

О.С. Угольников

? Предположим, что орбиты Земли (вокруг Солнца) и Луны (вокруг Земли) стали круговыми, при этом их большие полуоси (радиусы) не изменились. Будут ли тогда на Земле наблюдаться полные солнечные затмения?

! Рассмотрим конфигурацию, наиболее выгодную для наступления полной фазы солнечного затмения: наблюдения происходят вблизи экватора, а Солнце и Луна располагаются в зените. Наблюдатель находится на один экваториальный радиус ближе к обоим светилам, чем центр Земли. Для более далекого Солнца это практически не скажется на его видимом диаметре, а вот угловые размеры Луны заметно увеличатся. Определим величину видимых диаметров Солнца и Луны:

$$\delta_{1,2} = \frac{d_{1,2}}{L_{1,2} - R}.$$

Здесь d – пространственный диаметр светила, L – расстояние между его центром и центром Земли, R – экваториальный радиус Земли. Определив видимые диаметры и переведя их в градусную меру, получаем 31′55″ для Солнца и 31′36″ для Луны. Полных солнечных затмений в этом случае на Земле бы не наблюдалось.

IX. 6 КОМЕТА В НЕБЕ ЗЕМЛИ И МАРСА

О.С. Угольников

? При наблюдении с Земли Марс располагается в западной квадратуре, а комета – в восточной. С Земли комета имеет звездную величину 7^m, а с Марса 8^m. Каково расстояние от Солнца и Земли до кометы, если известно, что она видна с обеих планет вблизи линии эклиптики? Орбиты Земли и Марса считать круговыми, лежащими в одной плоскости. Поглощением света в атмосферах планет пренебречь.

! По условию задачи, все четыре тела (Солнце, Земля, Марс и комета) фактически лежат в плоскости эклиптики. Изобразим их на рисунке. Марс и комета находятся в противоположных квадратурах, и Земля располагается около линии, соединяющей Марс и комету. Определим расстояние между Землей и Марсом:

$$d_1 = \sqrt{r_1^2 - r_0^2} = 1.15 \text{ а.е.}$$

Здесь r_0 и r_1 – радиусы орбит Земли и Марса. По условию задачи, с Земли (расстояние d_2) комета выглядит на 1^m ярче, чем с Марса (расстояние d_1+d_2). Соотношение яркостей K равно 2.512, и для расстояний справедливо выражение:

$$\frac{d_1 + d_2}{d_2} = \sqrt{K}.$$

Здесь было учтено, что комета ориентирована одинаково по отношению к наблюдателям на Земле и Марсе. Отсюда

$$d_2 = \frac{d_1}{\sqrt{K} - 1} = 2.0 \text{ а.е.}$$

Расстояние кометы от Солнца равно

$$r_2 = \sqrt{r_0^2 + d_2^2} = 2.2 \text{ а.е.}$$