

11 класс

Задача 1. Пустая бутылка

После того, как в бутылку налили m г воды, уровень воды в сосуде повысился на

$$\Delta h_1 = \frac{m}{\rho S}. \quad (2)$$

Когда бутылка утонула, в нее затекла вода и уровень воды понизился на

$$\Delta h_2 = \frac{V - m/\rho}{S}. \quad (3)$$

По условию, уровень воды изменился на Δh . Это может означать как то, что он повысился, так и то, что он понизился. Поэтому решений будет два.

При этом

$$\Delta h_1 - \Delta h_2 = \frac{2m}{\rho S} - \frac{V}{S} = \pm \Delta h. \quad (4)$$

Решением этого уравнения является

$$V = \frac{2m}{\rho} \pm S\Delta h; \quad (5)$$

$$V_1 = \frac{2m}{\rho} + S\Delta h, \quad V_1 = 750 \text{ мл};$$

$$V_2 = \frac{2m}{\rho} - S\Delta h, \quad V_2 = 450 \text{ мл}.$$

Критерии оценивания

Получено выражение для Δh_1	1
Получено выражение для Δh_2	2
Замечено, что возможно два решения	1
Получена формула (4). Отсутствие двойного знака не влияет на оценку . . .	1
Получена формула (5). Отсутствие двойного знака не влияет на оценку . . .	1
Найден V_1	2
Найден V_2	2

Задача 2. Заряженный конденсатор

1.) Начальный заряд на конденсаторе $q_0 = 3C\mathcal{E}$.

После замыкания ключа ток течет против ЭДС. Максимальной сила тока будет тогда, когда заряд на конденсаторе будет равен $q = C\mathcal{E}$. ЭДС совершит отрицательную работу. Запишем закон сохранения энергии:

$$(q - q_0)\mathcal{E} = \frac{q^2}{2C} - \frac{q_0^2}{2C} + \frac{LI_{\max}^2}{2}, \quad (6)$$

откуда находим

$$I_{\max} = \mathcal{E} \sqrt{\frac{4C}{L}}.$$

2.) На конденсаторе заряда нет. Поэтому ЭДС совершает работу $A = -\mathcal{E}q_0$. Запишем закон сохранения энергии:

$$-\mathcal{E}q_0 = -\frac{q_0^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}. \quad (7)$$

Отсюда

$$I = \mathcal{E} \sqrt{\frac{3C}{L}}.$$

3.) Пусть против ЭДС протекает положительный заряд q и $I = 0$. Запишем закон сохранения энергии:

$$-\mathcal{E}q = \frac{(q_0 - q)^2}{2C} - \frac{q_0^2}{2C}. \quad (8)$$

Одно из решений $q = 0$ совпадает с начальным положением системы. Заряд на конденсаторе при этом равен $Q_1 = 3C\mathcal{E}$. Второе решение $q = 4C\mathcal{E}$ соответствует случаю, когда заряд на конденсаторе равен $Q_2 = q_0 - q = -C\mathcal{E}$. Знак заряда — противоположный начальному. То есть

$$Q_1 = 3C\mathcal{E}, \quad (9)$$

$$Q_2 = -C\mathcal{E}. \quad (10)$$

Критерии оценивания

Записан закон сохранения энергии (6) для начального момента времени и момента, когда сила тока максимальна	1
Получено выражения для I_{\max}	2
Записан закон сохранения энергии (7) для начального момента времени и момента, когда заряд конденсатора нулевой	1
Получено выражение для I	2
Записан закон сохранения энергии (8) для начального момента времени и момента, когда сила тока в цепи равна нулю	1
Указано, что существует два ответа на третий пункт задачи	1
Получено выражение (9) для первого ответа на третий пункт задачи	1
Получено выражение (10) для второго ответа на третий пункт задачи	1

Задача 3. На вираже (2)

Сила трения, действующая на автомобиль на повороте, имеет две составляющие: тангенциальную $F_\tau = \alpha v$, компенсирующую сопротивление воздуха, и

нормальную $F_n = mv^2/R$, обеспечивающую центростремительное ускорение. Таким образом, сила трения, действующая на колеса, равна

$$F = \sqrt{\alpha^2 v^2 + \frac{m^2 v^4}{R^2}}. \quad (11)$$

Мгновенная мощность, развиваемая двигателем, равна

$$P = (\vec{F} \cdot \vec{v}) = F_\tau v = \alpha v^2. \quad (12)$$

Условие отсутствия проскальзывания:

$$F \leq \mu mg. \quad (13)$$

Используя это условие, получаем, что скорость автомобиля не может превышать значение

$$V_{\max} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} \frac{\alpha^4 R^4}{m^4} + \mu^2 R^2 g^2} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 R^2}{m^2}}, \quad (14)$$

$$V_{\max} = 50 \text{ м/с}.$$

Если условие (13) выполнено, то скорость ограничивается только мощностью двигателя:

$$P \leq P_{\max}.$$

То есть

$$v \leq \sqrt{\frac{P_{\max}}{\alpha}} = v_{\max}. \quad (15)$$

График зависимости $v_{\max}(P_{\max})$ представлен на (рис. 12).

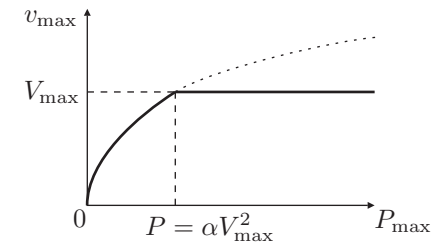


Рис. 12

Критерии оценивания

Получена формула (11) для силы трения, действующей на колёса	2
Записано выражение (12) для мощности, развиваемой двигателем	2
Записано условие отсутствия проскальзывания (13)	1

Получена формула (14) для максимальной скорости автомобиля 2
 Записано условие (15) для ограничения
 максимальной скорости мощностью двигателя 1
 Построен график зависимости $v_{\max}(P_{\max})$ 2

Задача 4. "Левитация"

Пусть во время столкновения скорость пластины равнялась V , а скорость шарика – v . Из законов сохранения энергии и импульса следует соотношение:

$$MV = mv. \tag{16}$$

Промежуток времени между столкновениями равен промежутку времени, необходимому для того, чтобы скорость пластины поменяла знак. То есть $2V = gt$.

$$t = \frac{2V}{g}. \tag{17}$$

Это время должно быть равно времени, необходимому для того, чтобы шарик долетел до земли, отразился и вернулся обратно. То есть

$$H = v \left(\frac{t}{2} \right) + \frac{g}{2} \left(\frac{t}{2} \right)^2. \tag{18}$$

Решая систему из этих трех уравнений, получаем

$$gH = \frac{mv^2}{M} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m}{M} \right) \simeq \frac{m}{M} v^2. \tag{19}$$

Поэтому

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{MgH}{2}. \tag{20}$$

Критерии оценивания

Получено соотношение (16) 1
 Получена формула (17) для промежутка между двумя столкновениями ... 2
 Записана формула, связывающая высоту H пластины над землёй
 со временем между двумя столкновениями 2
 Получена формула, эквивалентная формуле (19) 3
 Определена кинетическая энергия шарика у поверхности земли 2

Задача 5. Влажный воздух

В цилиндре в начале процесса пар ненасыщенный (это следует из $\alpha > \gamma$)

Пусть p — начальное давление пара. Тогда βp — начальное давление сухого воздуха.

Из уравнения Менделеева-Клапейрона для сухого воздуха:

$$\beta p \alpha V = \nu RT = p_1 V, \tag{21}$$

где $p_1 = \beta p$ — конечное давление сухого воздуха.

Из уравнения Менделеева - Клапейрона для пара

$$p \alpha V = \nu_1 RT; \quad p_2 V = \nu_2 RT. \tag{22}$$

$$k \nu_1 = \nu_1 - \nu_2, \tag{23}$$

где k — искомое отношение.

При этом, $p_1 + p_2 = \gamma(p + \beta p)$.

Решая эту систему уравнений, получаем

$$k = \frac{(\alpha - \gamma)(\beta + 1)}{\alpha}, \tag{24}$$

$$k = \frac{5}{8}.$$

Критерии оценивания

Записано уравнение Менделеева-Клапейрона для сухого воздуха 2
 Записаны уравнения Менделеева-Клапейрона для пара 2
 Получена формула, эквивалентная формуле (23) 1
 Указана связь давлений 1
 Получена формула (24) для искомого коэффициента k 3
 Получен правильный числовой ответ 1