10 класс

Задача 1. Платформа

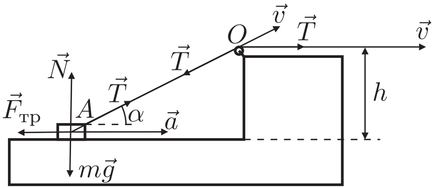

Рис. 22

Будем решать задачу в системе отсчета, связанной с платформой (рис. 22). Здесь стенка удаляется от платформы с постоянной скоростью v, а тело движется по платформе со скоростью $v_a = v/\cos\alpha$, так как проекция скорости точки A на отрезок нити AO равна v. Определим ускорение, с которым движется тело по платформе. Относительно точки O точка A движется по окружности радиуса $l = h/\sin\alpha$ со скоростью $v'_A = v_A \cdot \sin\alpha = v \cdot \text{tg}\alpha$. Центростремительное ускорение точки A направлено вдоль AO к точке O и равно $a_n = v^2\text{tg}^2\alpha/l$. Полное ускорение точки A направлено горизонтально и равно

$$a = \frac{a_n}{\cos\alpha} = \frac{v^2\text{tg}^2\alpha}{l\cos\alpha} = \frac{v^2}{h}\text{tg}^3\alpha.$$

Теперь рассмотрим действующие на тело силы. В проекции на горизонтальную ось

$$ma = T\cos\alpha - \mu N,$$

на вертикальную

$$N + T\sin\alpha - mg = 0.$$

Отсюда,

$$N = mg - T\sin\alpha, \qquad T = \frac{m(a+\mu g)}{cos\alpha + \mu sin\alpha},$$

$$N = \frac{m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Отметим сразу, что движение по платформе без отрыва от нее возможно только при $\alpha \leqslant \operatorname{arctg}(a/g)$.

Сила, которую необходимо прикладывать к платформе,

$$F = \mu N + T(1-\cos\alpha).$$

Подставляя N и T, получаем:

$$F = m\left(\frac{a+\mu g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} - a\right) = m\left(\frac{v^2 \operatorname{tg}^3\alpha + \mu g h}{h(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} - \frac{v^2}{h}\operatorname{tg}^3\alpha\right).$$

Задача 2. Вращающаяся трубка

Выделим небольшой участок ртути длиной Δl, находящийся на расстоянии l от оси вращения (рис. 23). Масса этого участка $\Delta m = \rho\Delta l S$, где S — площадь поперечного сечения трубки. Пусть p_1 — давление ртути на правой границе участка, p_2 — на левой, $\Delta p = p_2 - p_1$. Рассматримаевый участок движется с центростремительным ускорением $a = \omega^2 l$. По второму закону Ньютона:

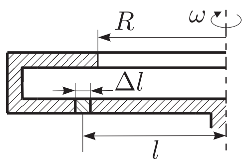

Рис. 23

$$\Delta m\omega^2 l = (p_2 - p_1)\,S = \Delta p S, \qquad \text{откуда} \qquad \Delta p = \rho\omega^2 l\Delta l.$$

На рис. 24 представлен график зависимости $\Delta p/\Delta l$ от расстояния до оси вращения l. Изменение давления при перемещении от $l = 0$ до $l = r$ есть площадь треугольника под этим графиком:

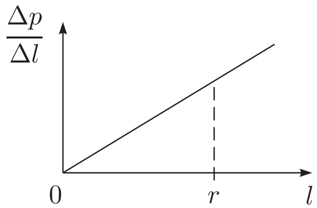

Рис. 24

$$p(r) - p(0) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2. \qquad (16)$$

Давление воздуха после раскручивания $p = np_0$. Поскольку температура воздуха сохраняется, то $pr = p_0 R$, где r — новое расстояние от центра вращения до границы воздуха со ртутью. Подставив эти условия в уравнение (16), получим:

$$(n-1)\,p_0 = \frac{1}{2}\rho\omega^2\frac{R^2}{n^2}, \qquad \text{откуда} \qquad \omega = \frac{n}{R}\sqrt{\frac{2p_0(n-1)}{\rho}}.$$

Задача 3. Монотонный процесс

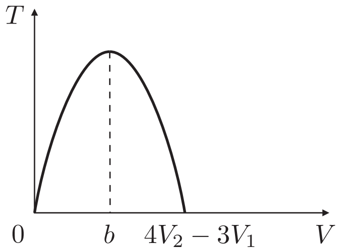

Рис. 25

Уравнение линейного процесса:

$$p = p_1 - (V - V_1)\beta,$$

где β — модуль углового коэффициента наклона прямой.

$$p(V_2) = 0{,}75p_1,$$

$$\beta = \frac{p_1}{4(V_2 - V_1)}.$$

Поэтому

$$p = p_1 - \frac{p_1}{4}\frac{V - V_1}{V_2 - V_1}. \qquad (17)$$

Из уравнения Менделеева — Клапейрона

$$pV = \left(p_1 - \frac{p_1}{4}\frac{V - V_1}{V_2 - V_1}\right)V = RT, \qquad (18)$$

видно, что температура зависит от объёма как

$$T = k(4V_2 - 3V_1 - V)V, \qquad (19)$$

где коэффициент пропорциональности $k = p_1/(4(V_2 - V_1))$. Уравнение (19) — парабола (рис. 25) с вершиной $b = (4V_2 - 3V_1)/2$. По условию температура должна меняться монотонно. Возможны два случая: возрастание или убывание температуры в течение всего процесса.

Рассмотрим случай, когда температура возрастает. Это означает, что объёмы V_1 и V_2 принадлежат отрезку $[0; b]$:

$$\frac{4V_2 - 3V_1}{2} \geqslant V_2 > V_1 \geqslant 0,$$

$$V_2 \geqslant 3V_1/2.$$

При убывании температуры объёмы V_1 и V_2 принадлежат отрезку $[b; 2b]$:

$$\frac{4V_2 - 3V_1}{2} \leqslant V_1 < V_2 \leqslant 4V_2 - 3V_1,$$

$$V_1 < V_2 \leqslant 5V_1/4.$$

Задача 4. Разлёт трёх заряженных частиц

В любой момент времени отношение расстояний между частицами $r_1 : r_2 : r_3$ остается равным отношению исходных расстояний $R_1 : R_2 : R_3$, поскольку конфигурации частиц являются подобными треугольниками. По этой же причине углы α_1, α_2, α_3 при вершинах m_1, m_2, m_3 остаются неизменными (рис. 26). Рассмотрим две сходственные стороны треугольников, например, R_3 и r_3. Проведём к ним перпендикуляр ON. Стороны параллельны, если проекции скоростей и ускорений частиц m_1 и m_2 на ON равны, это обусловлено тем, что частицы с массами m_1 и m_2 взаимодействуют лишь с зарядом частицы массой m_3. Исходя из закона Кулона и второго закона Ньютона можно получить выражения для ускорений и их проекций:

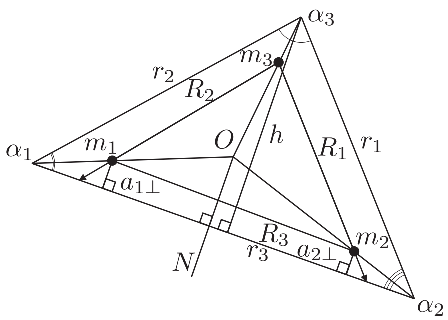

Рис. 26

$$a_{1\perp} = \frac{kq^2 \sin\alpha_1}{m_1 r_2^2} = a_{2\perp} = \frac{kq^2 \sin\alpha_2}{m_2 r_1^2}.$$

Высота h треугольника, опущенная на сторону r_3, равна:

$$h = r_2 \sin\alpha_1 = r_1 \sin\alpha_2.$$

Поэтому из предшествующего равенства следует

$$\frac{1}{m_1 r_2^3} = \frac{1}{m_2 r_1^3},$$

откуда

$$m_1 : m_2 = r_1^3 : r_2^3.$$

Аналогичным образом найдём отношение масс $m_2 : m_3 = r_2^3 : r_3^3$. Следовательно, $m_1 : m_2 : m_3 = r_1^3 : r_2^3 : r_3^3$.

Задача 5. Нелинейный элемент

Определим силу тока и напряжение на элементе при силе тока I через амперметр и напряжении $U_{AB} = U$ на входе цепи.

Пусть $U_{DB} = U_3$, $U_{CB} = U_1$, $U_{AD} = U_2 = U - U_3$, $U_{CD} = IR$ (рис. 27). Тогда для суммы токов в узле D:

$$I + I_2 - I_3 = 0,$$

откуда

$$\frac{U - U_3}{R} + I = \frac{U_3}{R},$$

$$U_3 = \frac{U + IR}{2}. \tag{20}$$

Сила тока через элемент с учётом (20):

$$I_Э = I + I_1 = I + \frac{U_1}{R} = I + \frac{IR + U_3}{R} = \frac{5}{2}I + \frac{U}{2R}. \tag{21}$$

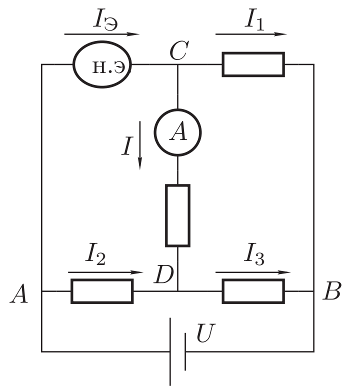

Рис. 27

Напряжение на элементе:

$$U_Э = U - IR - U_3 = \frac{U - 3IR}{2}. \tag{22}$$

Рассмотрим участок зависимости $I(U)$ в диапазоне напряжений от $U = 0$ В до $U = 5{,}5$ В. Так как на этом участке сила тока нелинейного элемента линейно зависит от напряжения и зависимости (20) и (21) линейны, то график $I_э(U_э)$ — прямая. Для построения прямой достаточно двух точек:

$$U = 0\ \text{В}, \quad I_э = 0\ \text{А}, \quad U_э = 0\ \text{В}$$

$$U = 5{,}5\ \text{В}, \quad I_э = 4\ \text{А}, \quad U_э = 2\ \text{В}.$$

Аналогично для участка от $U = 5{,}5$ В до $U = 10{,}5$ В. Сила тока не зависит от напряжения вплоть до $U_Э = 6$ В из (22).

Окончательно, зависимость $I_Э(U_Э)$ выглядит так (рис. 28):

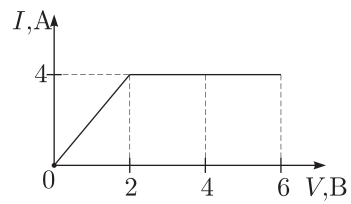

Рис. 28