10 класс

10.5. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться. (*И. Богданов*)

Решение. Сопоставим каждому мудрецу с некоторым мнением знак «+», а с противоположным — знак «−». Тогда расстановке мудрецов соответствует расстановка 101 знака по кругу.

Пусть в некоторый момент два одинаковых знака стоят подряд. Тогда в следующую минуту они не изменятся, и поэтому останутся одинаковыми. Значит, ни в один из последующих моментов они также не изменятся.

Назовём теперь знак *стабильным*, если рядом с ним стоит хотя бы один такой же. Поскольку количество знаков нечётно, стабильный знак найдётся. Кроме того, любой стабильный знак уже не изменяется и остаётся стабильным, а любой нестабильный знак в очередную минуту меняется на противоположный. Предположим, что в некоторый момент какой-то знак изменился. Тогда не все знаки были стабильными, и найдётся стабильный знак a, соседний с нестабильным знаком b. Это значит, что в следующую минуту a не изменится, а b изменится, то есть станет таким же, как a и, следовательно, стабильным.

Итак, пока знаки меняются, количество стабильных знаков строго увеличивается. Значит, рано или поздно оно станет равным 101, и перемены знака закончатся.

Замечание. Можно показать, что знаки могут изменяться в течение лишь первых 50 минут.

10.6. Существуют ли натуральные числа a, b, c, большие 10^{10} и такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2012? (*В. Сендеров*)

Ответ. Существуют.

Первое решение. Выберем некоторое $t > 10^{10}$ и положим $a = b = 2012t$, $c = 2012(t^2 - 1)$. Тогда $c \vdots 2012(t+1) = a + 2012 = b + 2012$, и $ab = 2012^2 t^2 \vdots 2012t^2 = c + 2012$. Отсюда следует, что a, b, c образуют искомую тройку.

Второе решение. Достаточно подобрать числа a', b', c' такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 1. Умножив каждое из них на 2012, мы получим требуемый пример.

Рассмотрим произвольное $t > 10^{10}$. Пусть $c' = 2t$, $b' = 2c' + 1 = 4t + 1$, $a' = b'c' - 1 = 8t^2 + 2t - 1 = (4t - 1)(2t + 1)$. Тогда $a'b'c' \vdots b'c' = a' + 1$, $a'b'c' \vdots a'c' \vdots (2t + 1) \cdot 2 = b' + 1 = 2(c' + 1)$, что и требовалось.

Замечание. В этом примере все числа различны. Существуют и другие примеры.

10.7. На координатной плоскости нарисовано n парабол, являющихся графиками квадратных трёхчленов; никакие две из них не касаются. Они делят плоскость на несколько областей, одна из которых расположена над всеми параболами. Докажите, что у границы этой области не более $2(n - 1)$ углов (то есть точек пересечения пары парабол). (*Р. Карасёв*)

Решение. Докажем утверждение задачи индукцией по n. При $n = 1$ оно очевидно. Пусть теперь $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ — данные квадратные трёхчлены ($n \geqslant 2$), причём $f_n(x)$ — трёхчлен с минимальным старшим членом (если таких несколько, то любой из них). Обозначим границу нашей области через T. Можно считать, что T содержит участки всех графиков.

Пусть S — множество всех таких чисел a, что точка множества T с абсциссой a лежит на графике трёхчлена $f_n(x)$. Иначе говоря, число a принадлежит S тогда и только тогда, когда выполнены неравенства $f_n(a) \geqslant f_i(a)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Обозначим через S_i множество всех решений i-го неравенства; тогда $S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_{n-1}$. Поскольку трёхчлен $f_n(x) - f_i(x)$ либо обладает отрицательным старшим коэффициентом, либо является на самом деле линейным, S_i — это либо отрезок (возможно, вырожденный), либо луч, либо вся прямая. Значит, и S является множеством такого же вида.

Итак, у T не более двух углов, принадлежащих графику $f_n(x)$. Если мы удалим этот график, исчезнут эти углы (и, возможно, появятся новые). При этом по предположению индукции новая область будет иметь не более $2(n - 2)$ углов; значит, исходная имела не более $2(n - 2) + 2 = 2(n - 1)$ углов, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Оценка, указанная в условии задачи, достигается. В качестве примера можно взять квадратные трёхчлены $2x^2, 2x^2-(x-1)(x-2), 2x^2-(x-3)(x-4), 2x^2-(x-5)(x-6), \ldots$.

Замечание 2. Приведем схему другого подхода к задаче, который годится не только для квадратных трёхчленов, но и для любых непрерывных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$, графики любых двух из которых пересекаются не более, чем в двух точках.

Пусть T разбивается точками пересечения функций на участки $I_0, I_1, \ldots, I_k$ графиков функций $f_{m_0}, f_{m_1}, \ldots, f_{m_k}$ (считаем, что участки занумерованы слева направо). Выписав подряд индексы, мы получим *слово* $M = (m_0, m_1, m_2, \ldots, m_k)$ в *алфавите* из n *букв* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ясно, что в слове M нет двух подряд идущих одинаковых букв (условие 1). Также нетрудно показать, что из слова M нельзя, вычеркнув несколько букв, получить слово вида (a, b, a, b), где $a \neq b$ (условие 2)*. Утверждение задачи теперь можно получить, доказав, что длина слова, удовлетворяющего условиям 1 и 2, не превосходит $2n-1$. Это можно сделать различными методами.

10.8. Точка E — середина отрезка, соединяющего точку пересечения высот неравнобедренного остроугольного треугольника ABC с его вершиной A. Окружность, вписанная в этот треугольник, касается сторон AB и AC в точках C' и B' соответственно. Докажите, что точка F, симметричная точке E относительно прямой $B'C'$, лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. (*Л. Емельянов*)

Первое решение. Будем считать, что $AB > AC$ (см. рис. 3). Пусть BB_1 и CC_1 — высоты треугольника $\triangle ABC$, H — точка их пересечения, O и I — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC, а r — радиус его вписанной окружности; положим $\angle BAC = \alpha$. Заметим, что $AB_1 = AB\cos\alpha$, $AC_1 = AC\cos\alpha$. Значит, треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом $k = \cos\alpha$.

Пусть точка L симметрична точке I относительно $B'C'$.

*Слова, удовлетворяющие таким условиям, называются последовательностями Дэвенпорта–Шинцеля.

Лемма. *Точки L и I — соответственные точки в треугольниках AB_1C_1 и ABC.*

Доказательство. Поскольку $AI \perp B'C'$, точка L лежит на биссектрисе AI. Значит, достаточно доказать, что $\frac{AL}{AI} = k$. Обозначим через M середину отрезка $B'C'$. Заметим, что прямоугольные треугольники $AC'I$ и $C'MI$ подобны, поэтому $\angle MC'I = \angle C'AI = \alpha/2$.

Имеем $AI = \frac{r}{\sin(\alpha/2)}$, $AL = AI - LI = AI - 2MI = \frac{r}{\sin(\alpha/2)} - 2r\sin(\alpha/2)$, значит, $\frac{AL}{AI} = 1 - 2\sin^2(\alpha/2) = \cos\alpha = k$, что и требовалось доказать. □

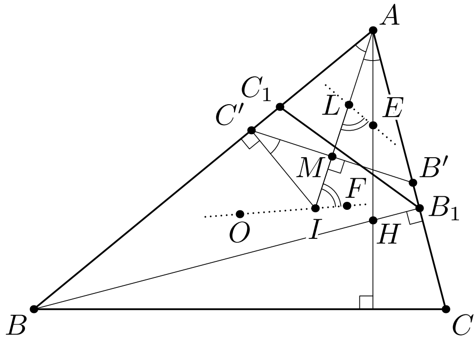

Рис. 3

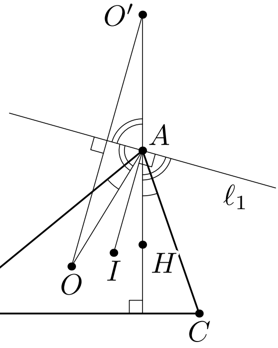

Рис. 4

Точки A, B_1, C_1 и H лежат на окружности с диаметром AH, поэтому E — центр этой окружности. Значит, точки E и O в треугольниках AB_1C_1 и ABC также соответственны; поэтому $\angle OIA = \angle ELA$. Так как точка F симметрична E относительно $B'C'$, отрезки FI и EL также симметричны, и $\angle FIA = \angle ELI$. Итак, $\angle OIA + \angle FIA = \angle ELA + \angle ELI = 180^\circ$, что и означает, что точки O, I, F лежат на одной прямой.

Второе решение. Мы используем те же обозначения, что и в первом решении. Обозначим через ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 внешнюю биссектрису угла BAC, серединный перпендикуляр к отрезку AI и прямую $B'C'$ соответственно. Очевидно, прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 параллельны. Пусть O' — точка, симметричная точке O относительно ℓ_1. Докажем следующие два утверждения: (1) точки O', A, E лежат на одной прямой; (2) отношение расстояний между точками O', A, E равно отношению расстояний между прямыми ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3.

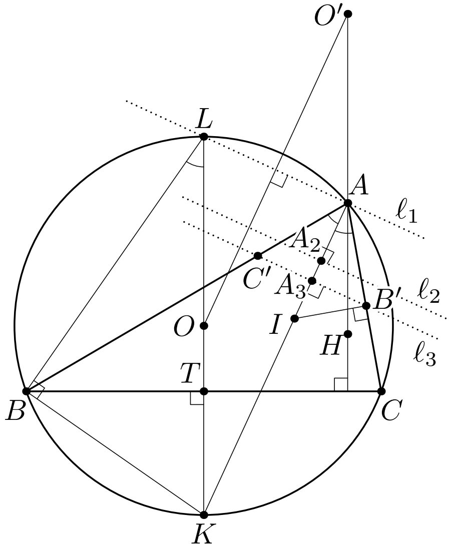

Рис. 5

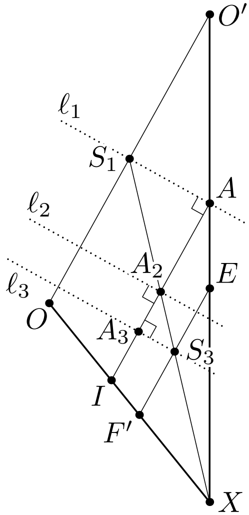

Рис. 6

(1). Заметим, что $\angle OAB = (180^\circ - \angle AOB)/2 = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAH$. Значит, лучи AO и AH образуют с прямой ℓ_1 углы, равные $\angle OAB + (180^\circ - \angle BAC)/2$; поэтому лучи AO' и AH противоположно направлены (см. рис. 4).

(2). Обозначим через A_2 и A_3 точки пересечения прямой AI с ℓ_2 и ℓ_3 соответственно, а через T, K, L середины стороны BC и дуг BC, BAC описанной окружности соответственно (см. рис. 5). Имеем $\angle LBK = \angle AB'I = 90^\circ$, $\angle BLK = \angle BAK = \angle B'AI$, поэтому прямоугольные треугольники LBK и $AB'I$ подобны. В этих треугольниках точки T и A_3 — основания соответствующих высот, а точки O, A_2 — середины гипотенуз, поэтому $\dfrac{OL}{OT} = \dfrac{A_2A}{A_2A_3}$. С другой стороны, точки T и O переходят соответственно в A и H при гомотетии с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом -2; поэтому $OT = \dfrac{AH}{2} = AE$, и из симметрии $AO' = AO = OL$. Таким образом, $\dfrac{AO'}{AE} = \dfrac{OL}{OT} = \dfrac{A_2A}{A_2A_3}$.

Теперь нетрудно завершить утверждение задачи. Покажем, что точки, симметричные точкам O', A и E относительно прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 соответственно (а это и есть точки O, I, F) лежат на одной прямой. Пусть прямые OI и AO' пересекаются в точке X. Пусть F' — точка пересечения прямых EF и OI. Наконец, пусть S_1 и S_3 — середины отрезков OO' и $F'E$ соответственно (см. рис. 6). Треугольники XOO', XIA и $XF'E$ гомотетичны, поэтому их медианы XS_1, XA_2, XS_3 лежат на одной прямой, и из подобия получаем $\frac{S_1A_2}{A_2S_3} = \frac{O'A}{AE} = \frac{A_2A}{A_2A_3}$. Это означает, что $A_3S_3 \parallel AS_1$. Значит, S_3 лежит на прямой ℓ_3, откуда $F' = F$, что и требовалось доказать.

Замечание. В последней части решения, по сути, доказан следующий факт. Пусть точка X движется по некоторой прямой m с постоянной скоростью, а прямая ℓ движется по плоскости, оставаясь параллельной самой себе. Тогда точка, симметричная X относительно ℓ, также движется по некоторой прямой.