Министерство образования и науки Российской Федерации
Академия повышения квалификации и профессиональной переподготовки работников образования

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

г. Орел, 2012 г.

XIX Всероссийская олимпиада школьников по астрономии. Заключительный этап, Орел, 2012 г. Условия и решения задач. Под редакцией А.С. Расторгуева, О.С. Угольникова, А.М. Татарникова, Е.Н. Фадеева. 48 стр.

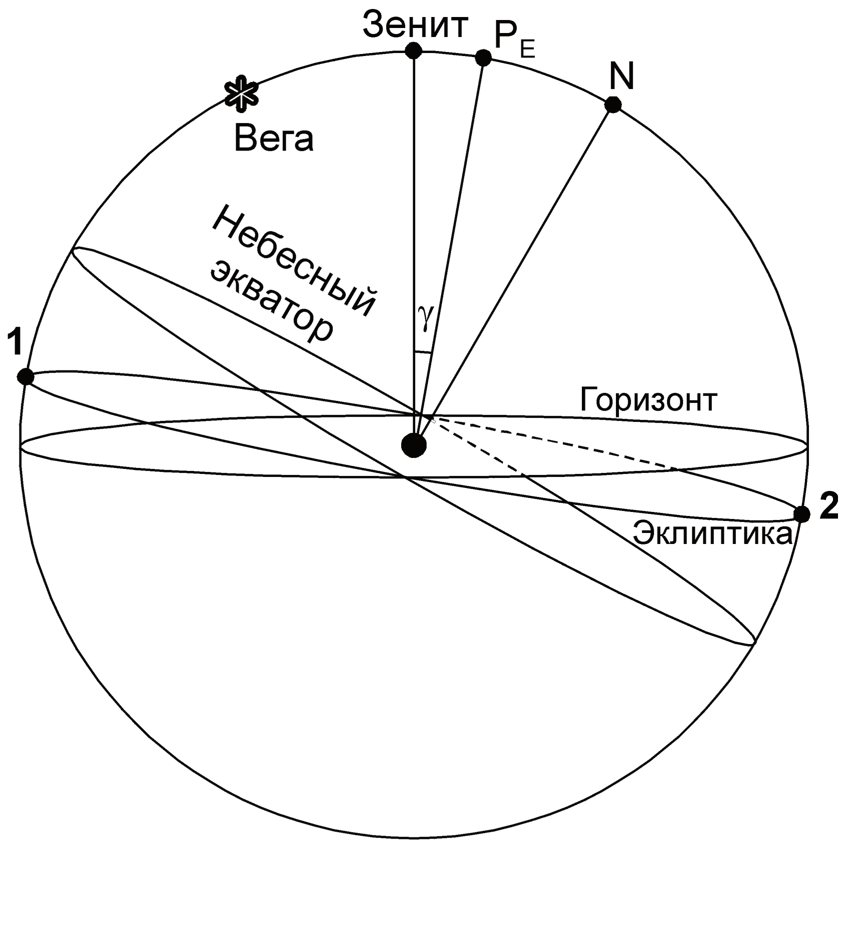
Оригинал-макет и верстка: О.С. Угольников.

11 класс

XI. 1 ВЕРХНЯЯ КУЛЬМИНАЦИЯ ВЕГИ

О.С. Угольников

? На каких широтах на Земле можно (хотя бы раз в год) увидеть звезду Вега в верхней кульминации на темном небе, при погружении центра Солнца под горизонт более 6 градусов? Координаты Веги считать равными α=18ч, δ=+39°, рефракцией пренебречь.



! Заданное в условии задачи прямое восхождение Веги (18 часов) совпадает с прямым восхождением точки зимнего солнцестояния (точки **1**). Следовательно, верхняя кульминация Веги и данной точки происходят одновременно. Рассмотрим положение Веги и эклиптики на небесной сфере в этот момент.

Обозначим цифрой **2** точку летнего солнцестояния с прямым восхождением 6 часов. Эта точка в настоящий момент находится в нижней кульминации. Точки весеннего и осеннего равноденствия, имеющие прямые восхождения 0 и 12 часов, совпадают с точками востока и запада соответственно и находятся на горизонте. Следовательно, одна из двух точек (**1** или **2**) является наивысшей точкой эклиптики, а другая – ее самой низкой точкой.

Вне зависимости от сезона года Солнце находится на эклиптике. Чтобы хоть раз в году увидеть Вегу в верхней кульминации на темном небе, у эклиптики должна существовать зона, погруженная под горизонт глубже, чем на 6°. Иными словами, одна из точек – **1** или **2** – должна располагаться на зенитном расстоянии, большем 96° (обозначим эту величину z_T).

Склонение точки **1** равно –ε, склонение точки **2** составляет +ε, где ε – величина наклона экватора к эклиптике (около 23.4°). Запишем выражения для зенитных расстояний точки **1** в верхней кульминации и точки **2** в нижней кульминации:

$$z_1 = |\,\varphi - \delta\,| = |\,\varphi + \varepsilon\,| > z_T,$$
$$z_2 = 180° - |\,\varphi + \delta\,| = 180° - |\,\varphi + \varepsilon\,| > z_T.$$

Для выполнения условия задачи должно выполняться любое одно из этих неравенств. Решая их, получаем:

$$\varphi > 72.6° \text{ или } \varphi < 60.6°.$$

Здесь мы учли, что значение широты по модулю не может превышать 90°. К данному выводу можно было прийти другим, более простым способом. Обозначим на рисунке северный полюс эклиптики как $\mathbf{P_E}$. Его прямое восхождение совпадает с прямым восхождением Веги, а склонение составляет 90° – ε или 66.6°. Если в момент верхней кульминации полюс эклиптики будет отстоять от зенита не более, чем на 6° (угол γ на рисунке), то все точки самой эклиптики будут располагаться не дальше, чем 6° от горизонта, и Вега не будет видна в верхней кульминации на темном небе. Считая, что зенитное расстояние полюса эклиптики более 6°, получаем те же интервалы значения широты.

Для получения окончательного ответа мы должны учесть, что Вега сама должна быть видна на небе в верхней кульминации, то есть не быть невосходящей звездой. Обозначив склонение Веги как δ_V, запишем условие для ее зенитного расстояния в верхней кульминации:

$$z_V = |\,\varphi - \delta_V\,| < 90°.$$

Отсюда получаем, что широта должна быть севернее –51°. Итак, условие задачи выполняется на интервалах широты (–51°, 60.6°), (72.6°, 90°].

XI. 2 ТЕЛЕСКОП И СОЛНЦЕ

Е.Н. Фадеев

? Телескоп с объективом диаметром 20 см навели на Солнце. Безопасно ли в него смотреть, если в фокальную плоскость телескопа ввели диафрагму, которая закрывает все Солнце, кроме одного солнечного пятна поперечником 20000 км? Диаметр выходного зрачка окуляра равен диаметру зрачка наблюдателя, который решился посмотреть в этот телескоп. Сравните освещенность, создаваемую солнечным пятном через этот телескоп, с освещенностью от других небесных объектов.

! Наблюдение Солнца без защитных средств опасно для зрения сразу по ряду причин. Даже при наблюдении без телескопа это, в конце концов, плачевно отразится на зрении. Самым быстрым поражающим фактором будет ультрафиолетовое излучение Солнца, которое негативно влияет на сетчатку глаза. Через оптическую схему обычного телескопа ультрафиолетовое излучение не проходит, но телескоп собирает значительно больше света, чем невооруженный глаз, что усиливает негативное влияние других факторов.

На те части глаза, которые находятся до хрусталика, падает пучок света, толщина которого равна диаметру зрачка. Если в этом пучке будет заключена большая энергия, то может пострадать роговица или хрусталик. Сам же хрусталик действует как собирающая линза, и собираемый им свет станет «выжигать» сетчатку.

Известно, что диаметр зрачка меняется в зависимости от освещенности. При ночных наблюдениях почти в полной темноте диаметр зрачка становится около 6-8 мм, а на ярком свету – уменьшается до 1-2 мм. Если принять диаметр зрачка и выходного зрачка телескопа за 1 мм, то увеличение телескопа составляет 200 крат. Если бы этот телескоп собирал свет со всего диска Солнца, то освещенность зрачка возросла бы в 40000 раз.

Вставим в схему диафрагму, пропускающую свет только одного участка поверхности Солнца, по радиусу в 70 раз меньшего всего диска. Тогда до глаза наблюдателя будет проходить только $(1/70)^2$ света полного Солнца. Если бы в данной части Солнца не находилось пятно, в глаз наблюдателя попало бы в 8 раз больше света, чем от полного Солнца без использования телескопа.

Но нам необходимо учесть, что температура солнечных пятен на 1500 градусов меньше температуры солнечной фотосферы. По закону Стефана-Больцмана отношение величин интенсивности (яркости единицы угловой площади) равно отношению температур в четвертой степени. То есть, светимость пятна примерно в 4 раза меньше.

Следовательно, в глаз наблюдателя, который захочет посмотреть на солнечное пятно в наш телескоп, попадет примерно в 2 раз больше света, чем если бы он смотрел на Солнце без телескопа. Угловой диаметр пятна при наблюдении в телескоп составит примерно 1.5°, т.е. пятно будет выглядеть по радиусу втрое больше, чем Солнце невооруженным глазом, но при этом его поверхностная яркость будет в 4 раза слабее.

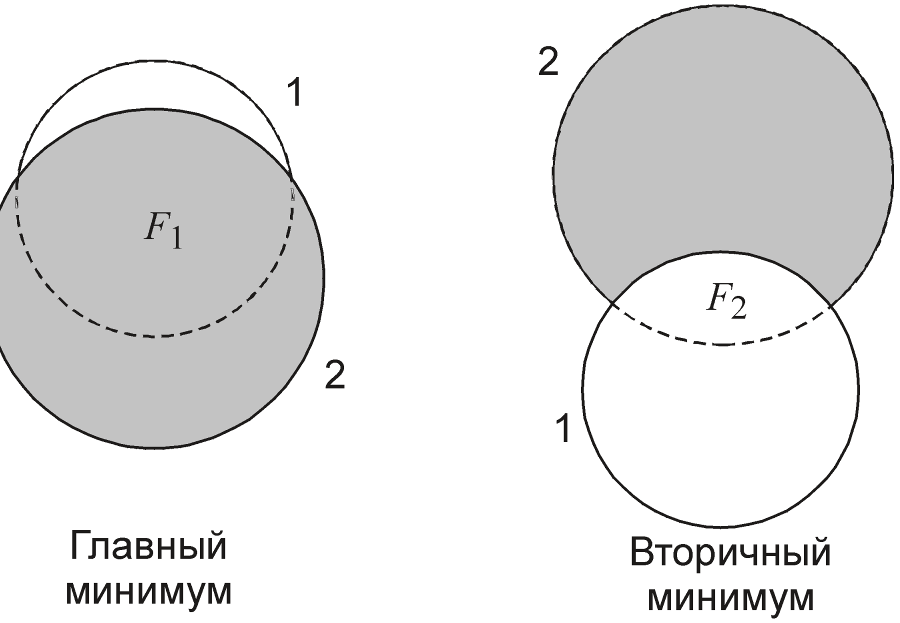
Из всего сказанного делаем вывод, что при взгляде в окуляр наблюдатель увидит солнечное пятно, по общей (но не поверхностной) яркости превосходящее Солнце при наблюдении глазом. Это не приведет к мгновенному поражению зрения, но смотреть на такой объект все же нельзя.

XI. 3 МИНИМУМЫ ЗАТМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

О.С. Угольников

? Главный минимум затменной переменной двойной звезды имеет глубину 1^m. Какой может быть величина вторичного минимума этой звезды? Звезды считать сферическими, эффектами отражения света от поверхности звезд и потемнением их дисков к краю пренебречь.

! Как известно, затменная переменная звезда – двойная система, в которой звезды в ходе орбитального движения периодически затмевают друг друга. Если звезды сферические и удалены от Солнца на расстояние, значительно превышающее размеры системы, а орбиты звезд круговые, то звезды по очереди будут закрывать одну и ту же угловую площадь поверхности друг друга. Однако в случае эллиптических орбит эта площадь может различаться.



Во время главного минимума общая яркость системы уменьшается в K раз:

$$K = 10^{-0.4\Delta m_1} = 0.4.$$

Обозначим величины яркости двух звезд как J_1 и J_2. Пусть во время главного минимума закрылась часть первой звезды. Обозначим эту часть («площадную фазу» затмения) как F_1. Тогда

$$K = \frac{(1-F_1)\cdot J_1 + J_2}{J_1 + J_2} = 1 - \frac{F_1 \cdot J_1}{J_1 + J_2}.$$

Отсюда запишем выражение для яркости второй звезды

$$J_2 = \frac{(F_1 - (1-K))}{1-K} J_1 \le \frac{K}{1-K} J_1 \approx \frac{2}{3} J_1 = \frac{2}{5}(J_1 + J_2).$$

В неравенстве было учтено, что величина F_1 не превышает единицу. Данный верхний предел достигается при равных размерах звезд и поверхностных яркостях, относящихся как 3:2. Тогда в случае центрального затмения более яркой звезды падение блеска составит 1^m. Во время вторичного минимума затмевается уже вторая звезда. Обозначим площадную фазу затмения как F_2. Яркость пары будет относиться к аналогичной величине вне затмения как

$$k = \frac{J_1 + (1-F_2)\cdot J_2}{J_1 + J_2} = 1 - \frac{F_2 \cdot J_2}{J_1 + J_2} \ge 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Максимально возможное падение блеска во время вторичного минимума составит

$$\Delta m_2 = -2.5 \lg k \le -2.5 \lg \frac{3}{5} = 0.55.$$

Итак, глубина вторичного минимума может составлять от 0^m (если вторая звезда темная или второе затмение не происходит из-за эллиптичности орбит) до 0.55^m (при полных затмениях звезд с одинаковыми размерами и яркостями в отношении 3:2).

XI. 4 АЛЮМИНИЕВЫЙ ПАРУС

А.Н. Акиньщиков

? Идеально отражающий плоский алюминиевый солнечный парус обращается вокруг Солнца по круговой орбите с радиусом 1 а.е. и периодом 1.5 года. Парус всегда расположен перпендикулярно направлению на Солнце. Найдите толщину паруса. Плотность алюминия составляет 2.7 г/см³. Взаимодействие паруса и планет не учитывать.

! Обозначим плотность паруса ρ, его толщину – d, а его площадь – S. На парус будут действовать две силы – притяжение Солнца и световое давление. Они направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны. Сила притяжения, направленная к Солнцу, составляет

$$F_{\mathrm{G}} = \frac{GMSd\rho}{R^2}.$$

Здесь M – масса Солнца, R – расстояние от Солнца до паруса. Сила светового давления в случае идеального отражения равна удвоенному импульсу солнечных фотонов, попадающих в парус в единицу времени. Импульс каждого фотона p равен E/c, где E – его энергия, а c – скорость света. Отсюда получаем величину силы светового давления:

$$F_{\mathrm{E}} = \frac{LS}{2\pi cR^2}.$$

Здесь L – светимость Солнца. Под действием этих двух сил парус движется со скоростью v по окружности радиуса R:

$$Sd\rho\frac{v^2}{R} = \frac{GMSd\rho}{R^2} - \frac{LS}{2\pi cR^2}.$$

Отсюда получаем выражение для скорости:

$$v^2 = \frac{GM}{R} - \frac{L}{2\pi cd\rho R} = v_0^2 - \frac{L}{2\pi cd\rho R}.$$

Здесь v_0 – круговая скорость движения под действием только силы тяготения (орбитальная скорость Земли). Толщина паруса равна

$$d = \frac{L}{2\pi c\rho R(v_0^2 - v^2)} = \frac{Lv_0^2}{2\pi GMc\rho(v_0^2 - v^2)}.$$

Выражая скорости через орбитальные периоды, получаем:

$$d = \frac{LT^2T_0^2}{8\pi^3 c\rho R^3(T^2 - T_0^2)} = \frac{LT^2}{2\pi GMc\rho(T^2 - T_0^2)}.$$

Здесь T – период обращения паруса, T_0 – период обращения Земли вокруг Солнца. Толщина паруса составляет 1 микрону.

XI. 5 ПРОХОЖДЕНИЕ ВЕНЕРЫ - СКВОЗЬ ВЕКА

О.С. Угольников

? 4 июня 1769 года в Санкт-Петербурге на специально построенной обсерватории российская императрица Екатерина II сначала наблюдала прохождение Венеры по диску Солнца, а затем (в тот же день!) частное солнечное затмение. Оцените, через сколько лет на нашей планете вновь можно будет наблюдать прохождение Венеры по диску Солнца и солнечное затмение с интервалом менее одних суток.

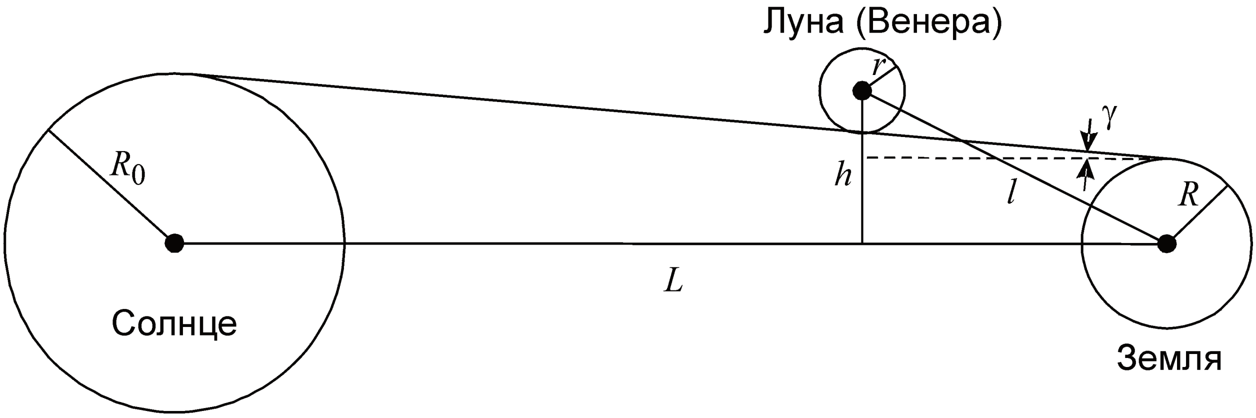
! Для решения задания нужно определить условие, при котором Венера в нижнем соединении или Луна в новолунии будут проецироваться на диск Солнца при наблюдении хотя бы из одной точки Земли. Задача имеет оценочный характер и связана с анализом больших интервалов времени. Поэтому орбиты Венеры, Земли и Луны могут считаться круговыми.

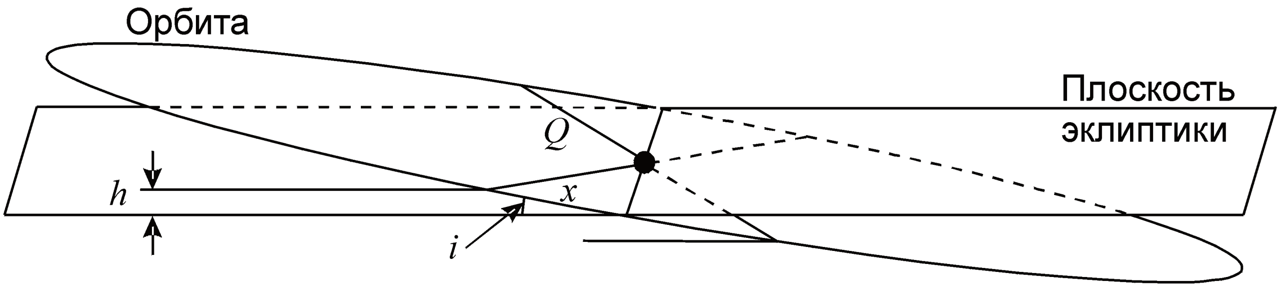
На рисунке изображен предельный случай, при котором касательное явление (затмение или прохождение Венеры) видно в одной точке Земли. Обозначим расстояние от Земли до Солнца через L, а расстояние от Земли до затмевающего объекта (Венеры либо Луны) через l. С учетом малости угловых размеров Солнца, Луны и Венеры можно записать выражение для максимального удаления Луны или Венеры от линии «Солнце-Земля», при котором происходит явление:

$$h = R + l\gamma + r = R + r + \frac{R_0 - R}{L} l = R_0 \frac{l}{L} + R \frac{L - l}{L} + r.$$

Здесь R_0, R и r – радиусы Солнца, Земли и Луны (Венеры) соответственно. Угол γ показан на рисунке. Движение Луны и Венеры происходит под небольшими углами к плоскости эклиптики, и величина h есть максимальное расстояние центра Луны (Венеры) от плоскости эклиптики в момент новолуния (нижнего соединения), при котором может произойти затмение (прохождение Венеры по диску Солнца). Значение этой величины составляет примерно 9900 км для Луны и 203000 км для Венеры.

Определим, какая доля новолуний (нижних соединений Венеры) удовлетворяет данному условию. Для этого изобразим орбиту Луны (Венеры) и плоскость эклиптики (справа):





Обозначим угол наклона плоскости орбиты к эклиптике через i, радиус орбиты – через Q. Величина h существенно меньше максимального удаления точки орбиты от плоскости эклиптики $Q\,i$ (равного 35000 км для Луны и 6.5 млн км для Венеры). Для того, чтобы точка орбиты находилась не далее расстояния h от плоскости эклиптики, она должна быть удалена от узла орбиты не далее, чем на расстояние:

$$x = \frac{h}{i}.$$

Здесь мы учли, что наклонение орбит Луны и Венеры не очень велико. Данная точка орбиты может находиться с двух сторон от каждого из двух узлов этой орбиты. В итоге, доля всей длины орбиты, расположенная не далее расстояния h от плоскости эклиптики, составляет:

$$P = \frac{2\cdot 2x}{2\pi Q} = \frac{2h}{\pi Q i}.$$

Учтем, что для Луны (далее – индекс «L») величина Q равна расстоянию от Земли до Луны l_L, а для Венеры (индекс «V») она равна $(L - l_V)$. В итоге получаем:

$$P_L = \frac{2}{\pi i_L}\left(\frac{R_0}{L} + R\frac{L-l_L}{L l_L} + \frac{r_L}{l_L}\right) = \frac{2}{\pi i_L}\left(\rho_0 + \rho_L + R\frac{L-l_L}{L l_L}\right) = 0.182 \approx \frac{1}{5.5}.$$

$$P_V = \frac{2}{\pi i_V}\left(R_0\frac{l_V}{L(L-l_V)} + \frac{R}{L} + \frac{r_V}{L-l_V}\right) = \frac{2}{\pi i_V}\left(R_0\frac{L-Q_V}{L Q_V} + p_0 + p_V\right) = 0.0202 \approx \frac{1}{50}.$$

Здесь ρ_0 и ρ_L – видимые радиусы Солнца и Луны при наблюдении с Земли, а p_0 и p_V – экваториальные параллаксы Солнца при наблюдении с Земли и Венеры. Эти параллаксы значительно меньше другого слагаемого во второй формуле и могут не приниматься в расчет. Данные значения показывают, что в среднем только одно из 5.5 новолуний сопровождается солнечным затмением (для упрощения число 5.5 можно заменить на 6 и считать, что затмения происходят раз в полгода), а прохождение Венеры по диску Солнца происходит лишь однажды из 50 ее нижних соединений.

Обозначим синодические периоды Луны и Венеры как S_L и S_V. Средний промежуток времени между солнечными затмениями равен

$$T_L = \frac{S_L}{P_L} \approx 162 \text{ сут}.$$

Средний промежуток времени между двумя прохождениями Венеры по диску Солнца составляет

$$T_V = \frac{S_V}{P_V} \approx 80 \text{ лет} .$$

Вероятность того, что за время t (одни сутки) до прохождения Венеры или за то же время после него произойдет солнечное затмение, составляет

$$q_t = \frac{2t}{T_L} = \frac{2tP_L}{S_L} \approx \frac{1}{81}.$$

Поэтому, в среднем лишь каждое 81-е прохождение Венеры по диску Солнца может сопровождаться солнечным затмением в интервале ±1 суток. Среднее время между такими событиями составляет

$$T = \frac{T_V}{q_t} = \frac{S_V S_L}{2tP_V P_L} \approx 6400 \text{ лет} .$$

Мы получили лишь характерное значение между подобными явлениями. В реальности, после 1769 года солнечные затмения и прохождения Венеры по диску Солнца не совпадут ни разу в течение 8000 ближайших лет. Трижды за этот период солнечное затмение и прохождение Венеры будут разделены промежутком в два дня (затмение 20 июня и прохождение Венеры 22 июня 3462 года, затмение 22 июня и прохождение Венеры 24 июня 3956 года, затмение 26 июля и прохождение Венеры 28 июля 7844 года). Еще в одну дату, 8 июля 5657 года, состоится прохождение Венеры по диску Солнца и новолуние, при котором солнечное затмение будет наблюдаться в ближайших окрестностях Земли.

XI. 6 АККРЕЦИЯ НА НЕЙТРОННУЮ ЗВЕЗДУ

Е.Н. Фадеев

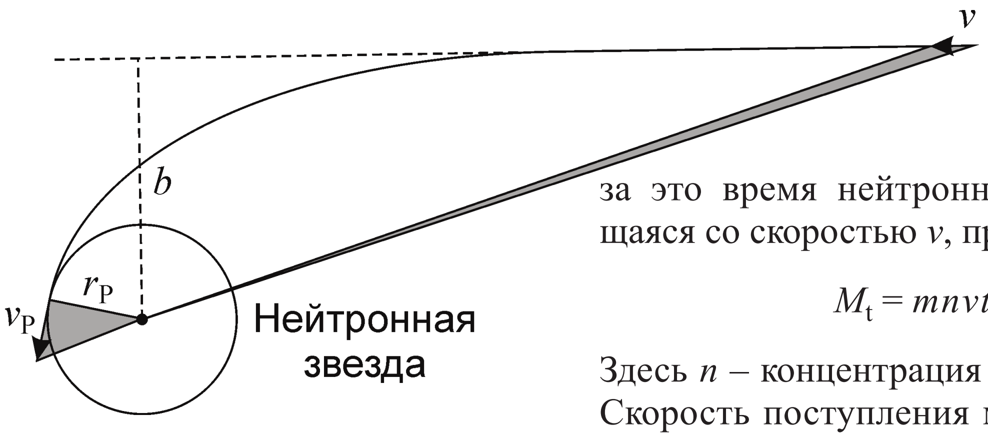
? Нейтронная звезда движется со скоростью 100 км/с через облако молекулярного водорода с температурой 10 K и плотностью 10^3 см$^{-3}$. Оцените скорость, с которой нейтронная звезда будет набирать массу вследствие аккреции. Столкновения между частицами облака не учитывать.

! Движущаяся через облако звезда будет захватывать вещество, как непосредственно оказавшееся перед ней, так и притянутое со стороны. Зная температуру облака, можно оценить среднюю скорость молекул водорода:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{5kT}{m}} \approx 450 \text{ м/с}.$$

Здесь k – постоянная Больцмана, T – температура облака, m – масса молекулы водорода. Средняя скорость молекул оказалась на два с лишним порядка меньше скорости нейтронной звезды. Мы пренебрегаем столкновениями между частицами и будем считать, что изначально они неподвижны относительно звезды.

Будем также считать, что нейтронная звезда аккрецирует на себя все частицы облака, которые окажутся ближе некоторого расстояния b к ее траектории. За время t на звезду упадет масса цилиндра радиусом b и длиной стороны vt. Тогда



за это время нейтронная звезда, движущаяся со скоростью v, притянет массу

$$M_t = mnvt\pi b^2.$$

Здесь n – концентрация молекул водорода. Скорость поступления массы на нейтронную звезду составляет

$$\dot{M} = mnv \cdot \pi b^2.$$

Если предположить, что нейтронная звезда поглотит только те частицы, которые располагаются непосредственно на ее траектории, и расстояние b равно ее собственному радиусу (10 км), то мы получаем весьма небольшое значение темпа аккреции в 10^{-4} кг/с.

Рассмотрим более правдоподобный вариант. Совместим начало координат с центром нейтронной звезды. В этой системе координат молекулы водорода будут налетать на нейтронную звезду с одного направления, двигаясь по гиперболическим орбитам. При этом на звезду будут падать только частицы, у которых перицентр орбиты находится ниже поверхности нейтронной звезды.

Нас интересует граничный случай, при котором частица в перицентре коснется поверхности нейтронной звезды. Скорость частицы на удалении от нейтронной звезды (в этой системе координат) равна v, прицельный параметр равен b. Пусть перицентрическое расстояние (или радиус нейронной звезды) равно r_P, а перицентрическая скорость – v_P. Тогда из II закона Кеплера (равенства площадей закрашенных треугольников на рисунке) можно получить простое соотношение:

$$v\, b = v_P\, r_P.$$

Из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{v_P^2}{2} = \frac{v^2}{2} + \frac{GM}{r_P}.$$

Здесь M – масса нейтронной звезды (будем считать ее равной массе Солнца). Подставляя первую формулу во вторую, получаем:

$$\frac{v^2 b^2}{2r_P^2} = \frac{v^2}{2} + \frac{GM}{r_P}.$$

Отсюда получаем выражение для прицельного параметра:

$$b^2 = r_P^2 + \frac{2GMr_P}{v^2} \approx \frac{2GMr_P}{v^2}.$$

Темп аккреции составит:

$$\dot{M} = \frac{2\pi GMmnr_P}{v} = 280\ \text{кг}/\text{с}.$$