10 класс

Задача 1. Про тазики

Выясним, на какую глубину y погрузился бы в воду плавающий квадратный тазик:

$$mg = \rho \left(\frac{a^2}{4}\right) yg, \qquad \text{откуда} \qquad y = \frac{4m}{\rho a^2} = 10 \text{ см.} \qquad (6)$$

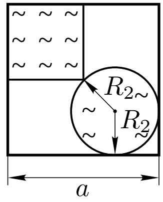

Рис. 24

Таким образом, объём вылитой из круглого тазика воды не должен превышать объем, при котором уровень воды в поддоне при не всплывающем квадратном тазике достигнет величины y:

$$\pi R_1^2 h < 3a^2 y/4. \qquad (7)$$

Подставляя y из (6) в (7), получим:

$$R_1 < \sqrt{\frac{3}{\pi}\frac{m}{\rho h}} = 27{,}6 \text{ см.}$$

Теперь проверим, тазик какого максимального радиуса R_2 можно поместить в поддоне вместе с квадратным тазиком.

Наибольший радиус круглого тазика, ещё вмещающегося в поддон с квадратным тазиком, будет в случае, если его центр расположен на диагонали поддона (рис. 24). В этом случае радиус тазика R_2 вычисляется из условия:

$$R_2 + \frac{R_2}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2},$$

откуда получаем:

$$R_2 = a\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \approx 23{,}4 \text{ см.}$$

Таким образом, максимальный радиус круглого тазика, который может использовать хозяйка, $R_M = R_2 = 23{,}4$ см.

Критерии оценивания

Найден радиус R_1 тазика, при котором квадратный тазик не всплывает 4
Найден максимальный радиус R_2 тазика, ещё вмещающийся в поддон 4
Проведено сравнение радиусов и сделан верный выбор 2

Задача 2. Блоки и веревка

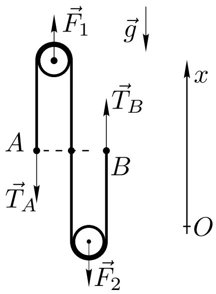

Рис. 25

Так как трения в оси верхнего блока нет, а точки A и B находятся на одном уровне, то $|\vec{T}_A| = |\vec{T}_B|$. Спроецируем на вертикальную ось OX внешние силы, действующие на тяжёлую верёвку и блоки (рис. 25):

$$-T_A + F_1 - F_2 + T_B - \rho g L = 0,$$

$$F_1 - F_2 = \rho g L,$$

откуда:

$$L = \frac{F_1 - F_2}{\rho g} = 8 \text{ м}.$$

Критерии оценивания

Записано условие равновесия для левой части системы 4
Записано условие равновесия для правой части системы 4
Найдена L 2

Задача 3. Брусочки

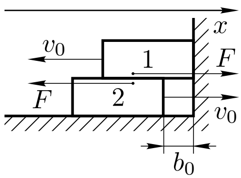

Рис. 26

Направим координатную ось Ox вдоль вектора скорости брусков. В дальнейшем все величины будем проецировать на эту ось с учётом знака.

После упругого соударения верхнего бруска со стенкой его скорость изменит знак. Силы трения, действующие на бруски, изображены на рисунке 26 (чтобы не загромождать рисунок, здесь опущены нормальные реакции опоры).

$$F = \mu m g.$$

Согласно второму закону Ньютона, ускорения брусков:

$$a_1 = F/m = \mu g, \qquad a_2 = -F/m = -\mu g.$$

Верхний брусок движется, замедляясь, влево, а нижний — замедляясь, вправо. Обратим внимание на то, что $v_2 = -v_1$. Ускорение верхнего бруска относительно нижнего:

$$a_{12} = 2\mu g.$$

Возможны два случая.

Нижний брусок остановится, не доехав до стенки (одновременно с ним остановится и верхний брусок). При этом кинетическая энергия бруска пойдёт на совершение работы против силы трения. Отсюда определим b.

$$a_{12}m(b-b_0)=0-\frac{m(2v_0)^2}{2},\qquad b=b_0-\frac{v_0^2}{\mu g}.$$

Если $mv_0^2/2 \geqslant \mu mgb_0$, то нижний брусок доедет до стенки со скоростью v_k, которую можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_k^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}-\mu gb_0m,\qquad \text{откуда}\qquad v_k=\sqrt{v_0^2-2\mu gb_0}.$$

После упругого столкновения бруска со стенкой его скорость сменит знак, и далее система будет двигаться с этой скоростью как одно целое.

Теперь найдем b:

$$a_{12}(b-b_0)=\frac{(2v_k)^2}{2}-\frac{(2v_0)^2}{2}=\frac{8\mu gb_0}{2},\qquad \text{откуда}\qquad b=b_0-\frac{8\mu gb_0}{2\cdot 2\mu g}=-b_0.$$

Таким образом:

$$b=b_0-\frac{v_0^2}{\mu g},\qquad \text{если}\qquad v_0<\sqrt{2\mu gb_0},$$

$$b=-b_0,\qquad \text{если}\qquad v_0\geqslant\sqrt{2\mu gb_0}.$$

График зависимости $b(v_0^2)$ (линейные координаты) приведён на рисунке 27:

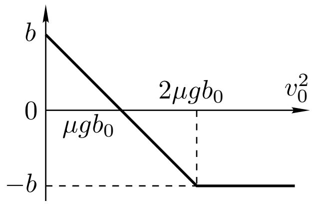

Рис. 27

Критерии оценивания

Получены выражения для a_1, a_2, v_1, v_2 с учётом знаков 2
Получено выражение для s_{12} 2
Найдено смещение b в случае $v_0<\sqrt{2\mu gb_0}$ 2
Найдено смещение b в случае $v_0\geqslant\sqrt{2\mu gb_0}$ 2
Построен график зависимости $b(v_0^2)$ 2

Задача 4. Потерянные оси

Внутренняя энергия газа является функцией состояния, поэтому её изменение в процессе $1\to 2\to 3$ равно:

$$\Delta U_{1\to2\to3}=\nu C_V(T_3-T_1)=\frac{C_V}{R}(p_3V_3-p_1V_1)=\frac{C_V}{R}(p_3-p_1)V_1.$$

Работа, совершённая над газом в процессе $1 \to 2 \to 3$, численно равна площади треугольника $1 \to 2 \to 3$:

$$A_{1\to2\to3} = -\frac{(p_3 - p_1)\Delta V}{2}.$$

По первому закону термодинамики:

$$A_{1\to2\to3} + \Delta U_{1\to2\to3} = Q_{1\to2\to3} = 0.$$

Отсюда следует, что:

$$-\frac{(p_3 - p_1)\Delta V}{2} + \frac{C_V}{R}(p_3 - p_1)V_1 = 0.$$

С учётом того, что для гелия $C_V = 3R/2$, мы получаем:

$$3V_1 = \Delta V = V_2 - V_1,$$

откуда:

$$V_2 = 4V_1.$$

Критерии оценивания

Записано выражение для изменения внутренней энергии 3
Записано выражение для работы, совершённой над газом 3
Записан первый закон термодинамики 1
Найден объём V_2 3

Задача 5. Мостик

1. Введём обозначения: U_i — падение напряжения, а I_i — сила тока, проходящего через соответствующий резистор. Поскольку вольтметр идеальный, то:

$$I_1 = I_2, \tag{8}$$

$$U_1 + U_2 = U_3 + U_4 = U_{01}. \tag{9}$$

Отсюда следует:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = I_2 = \frac{U_2}{R_2},$$

или

$$U_1 = \frac{R_1}{R_2}U_2. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), получим:

$$U_2 = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)}U_{01}, \qquad U_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_{01} = 3{,}9 \text{ В}. \tag{11}$$

Аналогичным образом:

$$U_3 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_{01} = 4{,}9\ \text{В}, \qquad U_4 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_{01} = 4{,}2\ \text{В}.$$

Отсюда найдём показания вольтметра:

$$U_V = U_1 - U_3 = 3{,}9\ \text{В} - 4{,}9\ \text{В} = -1\ \text{В}.$$

Знак минус означает, что стрелка отклонится влево.

2. Пусть I — сила тока, идущего через батарею. Заметим, что:

$$I = I_1 + I_3 = I_2 + I_4.$$

Поскольку сопротивление амперметра пренебрежимо мало, падение напряжения на резисторах R_1 и R_3 одинаково. Обозначим его U_1. Аналогично, падение напряжения на резисторах R_2 и R_4 обозначим U_2. Тогда:

$$I = U_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) = U_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right), \tag{12}$$

$$U_1 + U_2 = U_{02}. \tag{13}$$

Решая систему уравнений (12) и (13), получим:

$$U_1 = 4{,}2\ \text{В}, \qquad U_2 = 4{,}8\ \text{В}.$$

Предположим, что ток идёт через амперметр от (+) к (−). Тогда:

$$I_1 - I_2 = I_A \qquad \text{и} \qquad I_3 + I_A = I_4.$$

Решая любое из этих двух уравнений, например, первое, получим:

$$I_A = I_1 - I_2 = \frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2}{R_2} = 0{,}2\ \text{А}.$$

Получившаяся сила тока положительна, следовательно, стрелка отклонится вправо.

Критерии оценивания

Установлена связь между напряжениями U_1 и U_2 или U_3 и U_4 1
Найдены напряжения U_1 и U_3 2
Найдено показание вольтметра 1
Определено направление отклонения стрелки вольтметра 1
Записано выражение для I 1
Найдены напряжения U_1 и U_2 2
Найдено показание амперметра 1
Определено направление отклонения стрелки амперметра 1