Условия и решения задач

9 класс

9.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+4)$ будет целым. (*О. Подлипский*)

Ответ. $a = \frac{k}{3}$, где k — любое целое число.

Решение. Подставив $n = 1$ и $n = 2$, получаем, что числа $15a$ и $48a$ — целые. Значит, и число $48a - 3 \cdot 15a = 3a$ — тоже целое. Таким образом, $a = k/3$ для некоторого целого k.

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трёх последовательных чётных (или нечётных) чисел n, $n+2$, $n+4$ делится на 3; значит, $n(n+2)(n+4)$ делится на 3, а поэтому $an(n+2)(n+4) = k\,\frac{n(n+2)(n+4)}{3}$ — целое число.

Комментарий. Доказано, что любое число указанного вида подходит — 2 балла.

Доказано, что число a обязано иметь указанный вид — 4 балла.

Только правильный ответ — 1 балл (этот балл не суммируется с другими).

9.6. Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек — обозначим их A, B и C, после чего на плоскости отмечалась точка D, симметричная A относительно серединного перпендикуляра к BC.

Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходных точки также лежали на одной прямой. (*В. Шмаров*)

Решение. Предположим противное; тогда исходные три точки лежат на некоторой окружности ω. Докажем индукцией по количеству минут, что все отмеченные точки также лежат на ω. Действительно, изначально это верно. Пусть в некоторый момент по точкам A, B, C строится точка D. Тогда серединный перпендикуляр ℓ к BC проходит через центр ω, значит, эта окружность симметрична относительно ℓ. Так как точка A лежит на ω, то и D также на ней лежит.

Итак, через сутки все отмеченные точки лежат на ω. Но любая прямая пересекает ω не более, чем по двум различным точкам; значит, на ней не найдётся трёх отмеченных точек. Противоречие.

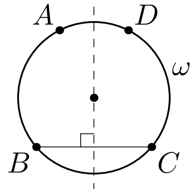

Рис. 1

Комментарий. Указано без доказательства, что все отмеченные точки лежат либо на одной окружности, либо на одной прямой — 2 балла.

9.7. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных. (*В. Сендеров*)

Ответ. $2, 3, 5$.

Решение. Ясно, что любые два числа тройки различны (если $p = q$, то $p^4 - 1$ не делится на q). Пусть для определённости p — наименьшее из чисел тройки. Нам известно, что число $p^4 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)$ делится на qr. Заметим, что $p - 1$ меньше любого из простых чисел q и r, а значит, взаимно просто с ними. Далее, число $p^2 + 1$ не может делиться на оба числа q и r, так как $p^2 + 1 < (p+1)(p+1) < qr$. Значит, $p + 1$ делится на одно из них (для определённости, на q). Поскольку $q > p$, это возможно лишь при $q = p + 1$. Тогда одно из чисел p и q чётно, а поскольку оно простое, то $p = 2$, $q = 3$. Наконец, r является простым делителем числа $p^4 - 1 = 15$, отличным от $q = 3$, значит, $r = 5$.

Осталось проверить, что тройка $2, 3, 5$ удовлетворяет условиям задачи.

Комментарий. Только правильный ответ — 1 балл.

Идея выбора наименьшего p из трех простых чисел для исследования делимости $p^4 - 1$ на qr оценивается в 1 балл.

При верном решении отсутствует указание на необходимость проверки того, что полученная тройка подходит — снимается 1 балл.

9.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника? (*А. Магазинов*)

Ответ. $N = 102$.

Решение. Первое решение. Пусть $N \leqslant 101$. Распилим палку на $N - 1$ палочки длиной 1 см и одну палочку длиной $(201 - N)$ см. Из полученного набора невозможно сложить прямоугольник, так как каждая из сторон прямоугольника меньше полупериметра и, следовательно, палочка длиной $201 - N \geqslant 100$ см не может быть частью никакой стороны. Таким образом, $N \geqslant 102$.

Покажем, что при $N = 102$ искомый прямоугольник найдется. Для этого заметим, что среди всех палочек найдутся две длиной по 1 см. В самом деле, если бы это было не так, то суммарная длина палочек была бы не меньше $2 \cdot 101 + 1 = 203$ см, что неверно.

Отложим эти две палочки. Пусть длины оставшихся палочек равны $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ см, тогда имеем $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = 198$. Среди 100 чисел $A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, A_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$ найдутся два, дающие одинаковый остаток от деления на 99. Пусть это A_k и A_ℓ, $k < \ell$. Число $A_\ell - A_k$ строго больше нуля и строго меньше 198, при этом оно делится на 99. Значит, $A_\ell - A_k = 99 = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_\ell$.

Тем самым, мы нашли несколько палочек суммарной длины 99 см. Отложим и их. Оставшиеся палочки также имеют суммарную длину 99 см. Таким образом, нам удастся сложить прямоугольник 1×99 см.

Второе решение. Предъявим другое доказательство того, что при $N = 102$ сложить прямоугольник удастся.

Обозначим длины палочек набора, выраженные в сантиметрах, через $a_1, a_2, \ldots, a_{102}$. Имеем $a_1 + a_2 + \ldots + a_{102} = 200$. Рассмотрим окружность длины 200 и разобьём её 102 красными точками на дуги длины $a_1, a_2, \ldots, a_{102}$. Эти точки являются некоторыми 102 вершинами правильного 200-угольника T, вписанного в эту окружность. Вершины T разбиваются на пары противоположных. Таких пар 100, а красных точек — 102, значит, среди красных точек найдутся две пары противоположных.

Эти две пары точек делят окружность на две пары равных дуг. Таким образом, мы разбили все палочки на четыре группы A, B, C, D, причём суммарные длины в группах A и C, а также в группах B и D равны. Значит, можно составить прямоугольник, используя каждую группу для составления одной его стороны.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Приведён пример, показывающий, что $N \geqslant 102$ — 1 балл.

Доказано, что $N = 102$ подходит, но не обоснована его минимальность — 5 баллов.