Возможные решения
9 класс

Задача 1. Спуск по желобу

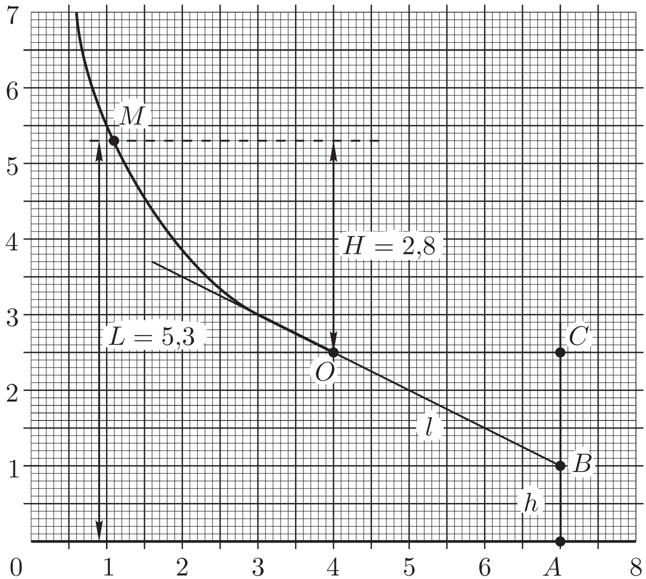

Рис. 16

Проведём касательную в нижней точке желоба O, а также горизонтальную линию через ту же точку. Из точки A проведём вертикальную линию, пересекающую касательную в точке B и горизонтальную линию — в точке C (рис. 16).

Движение тела по вертикали после отрыва от желоба описывается уравнением

$$y = v_{oy}t + \frac{gt^2}{2},$$

где v_{oy} — проекция скорости тела на вертикальную ось в момент отрыва от желоба, начало координат находится в точке O, ось Y направлена вниз.

На рисунке отрезок CB равен расстоянию, которое тело прошло бы по вертикали за время падения t_0, если бы не было ускорения свободного падения, а отрезок BA равен расстоянию, которое тело пролетело бы за то же время t_0 при свободном падении без начальной скорости. Кроме того, отрезок OB равен пути, которое тело, двигаясь с постоянной скоростью v_0, прошло бы за время t_0. Таким образом,

$$AB = h = \frac{gt_0^2}{2}; \quad OB = l = v_0 t_0.$$

Исключив из этих соотношений время падения t_0, получим:

$$v_0^2 = \frac{gl^2}{2h}.$$

Высоту H начальной точки над точкой O найдём из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH.$$

Отсюда:

$$H = \frac{l^2}{4h}.$$

По рисунку находим:

$$h = 1, \quad l^2 = (CB)^2 + (OC)^2 = (1{,}5)^2 + (3)^2 = 11{,}25;$$

$$H = \frac{11{,}25}{4} \approx 2{,}8.$$

Расстояние от точки M до пола равно $L = 5{,}3$ условных единиц.

Критерии оценивания

Записан закон движения тела после отрыва от желоба 2
Проведена касательная в т. O и найдена точка пересечения этой касательной с вертикальной прямой, проходящей через т. A 2
Определены с помощью рисунка величины $gt_0^2/2$ и v_0t_0 в отн. единицах 2
Записан закон сохранения энергии 1
Найдено значение H в отн. единицах 1
На рисунке указана точка, в которой было отпущено тело 1
Найдено расстояние L 1

Задача 2. Шайба и горка

1. Пусть m и M — массы шайбы и горки соответственно, v_0 — начальная скорость шайбы, v_1 и v_2 — проекции скоростей шайбы и горки на направление $\vec{v}_0$ после соскальзывания шайбы. Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$mv_0 = mv_1 + Mv_2, \tag{1}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}. \tag{2}$$

Из этих уравнений следует:

$$v_1 = \frac{m-M}{m+M}v_0, \quad v_2 = \frac{2m}{m+M}v_0. \tag{3}$$

Шайба и горка после соскальзывания шайбы движутся с одинаковыми по модулю скоростями в противоположных направлениях ($v_2 = -v_1$), следовательно, должно выполняться условие: $(m - M) = -2m$, откуда следует: $M = 3m$.

2. Рассмотрим теперь момент времени, когда шайба достигла максимальной высоты H. В этот момент скорости шайбы и горки одинаковы и равны v. Запишем для этого момента законы сохранения импульса и энергии:

$$mv_0 = (m+M)v,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH + \frac{m+M}{2}v^2. \tag{4}$$

Решая совметсно эти уравнения, получим:

$$\frac{mv_0^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\right) = mgH, \tag{5}$$

откуда

$$\frac{mgH}{mv_0^2/2} = \frac{M}{m+M} = \frac{3}{4}. \tag{6}$$

Критерии оценивания

Записан закон сохранения импульса для момента после соскальзывания шайбы 1
Записан закон сохранения энергии для момента после соскальзывания шайбы 1
Найдены скорости горки и шайбы после соскальзывания шайбы с горки ... 2
Записано соотношение между скоростями горки и шайбы после соскальзывания шайбы с горки 1
Найдено соотношение масс шайбы и горки 1
Записан закон сохранения импульса для момента максимального подъёма шайбы 1
Записан закон сохранения энергии для момента максимального подъёма шайбы 1
Найдено отношение максимальной потенциальной энергии шайбы к её начальной кинетической энергии 2

Задача 3. Циклический теплообмен

1. Рассмотрим процессы теплообмена в первом цикле:

$$c_1t_1 + ct_2 = (c_1 + c)t_1', \quad \text{откуда} \quad t_1' = \frac{c_1t_1 + ct_2}{c_1 + c},$$

$$c_2t_2 + ct_1' = (c_2 + c)t_2', \quad \text{откуда} \quad t_2' = \frac{c_2t_2 + ct_1'}{c_2 + c}.$$

Здесь t_1' и t_2' — температуры воды в сосудах по окончании первого цикла.

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{(c_2t_2 + ct_1') - (c_2 + c)t_1'}{c_2 + c} = \frac{c_2(t_2 - t_1')}{c_2 + c} =$$

$$= \frac{c_2[(c_1 + c)t_2 - (c_1t_1 + ct_2)]}{(c_1 + c)(c_2 + c)} = \frac{c_1c_2(t_2 - t_1)}{(c_1 + c)(c_2 + c)}.$$

$$\Delta t' = A(t_2 - t_1), \quad A = \frac{c_1c_2}{(c_1 + c)(c_2 + c)} < 1.$$

Таким образом, за каждый цикл разность температур в сосудах уменьшается в $1/A$ раз. При $c_1 : c_2 : c = 4 : 5 : 1$

$$A = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{A} = \frac{3}{2}, \quad \left(\frac{1}{A}\right)^n \geq N.$$

Подбором (на калькуляторе) легко получить: $n_{min} = 8$.

2. После большого числа циклов температуры бруска и воды в сосудах будут одинаковыми. Установившуюся температуру можно найти из условия теплового баланса:

$$c_1t_1 + c_2t_2 + ct_2 = (c_1 + c_2 + c)t_0, \quad \text{откуда} \quad t_0 = \frac{2t_1 + 3t_2}{5}.$$

Критерии оценивания

Записано выражение для t_1' 1
Записано выражение для t_2' 1
Получено выражение, связывающее величину $\Delta t'$ с Δt 2
Найдено выражение, связывающее разность температур на n – ом шаге
с начальной разностью температур 1
Определено минимальное количество шагов n_{min} 2
Записано уравнение теплового баланса для установившейся температуры .. 2
Определена величина установившейся температуры 1

Задача 4. Проволочный куб

1. Обратим внимание на то, что резистор R_{48} замкнут накоротко. Следовательно, по нему ток не течёт, и его можно удалить из схемы без нарушения распределения токов и напряжений во всех других рёбрах. При этом схема сильно упрощается и её можно изобразить в виде комбинации параллельно и последовательно соединённых резисторов (рис. 17). Из приведённой

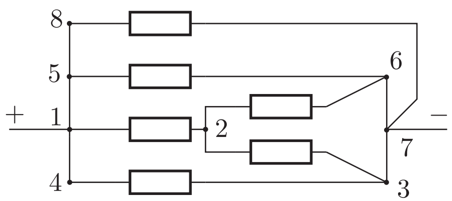

Рис. 17

эквивалентной схемы видно, что резисторы R_{87}, R_{56} и R_{43} включены между узлами 1 и 7 параллельно. Также параллельно этим резисторам включена цепочка, состоящая из резисторов R_{12}, R_{26} и R_{23}. Сопротивление этой цепочки R' равно:

$$R' = R + \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{3}{2}R.$$

Таким образом, полное сопротивление R_{AB} определим из соотношения:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{3}{R} + \frac{2}{3R} = \frac{11}{3R},$$

откуда следует, что

$$R_{AB} = \frac{3}{11}R; \quad I_{AB} = \frac{U}{R_{AB}} = \frac{11}{3}\frac{U}{R}.$$

2. Из эквивалентной схемы видно, что сила тока будет максимальна в ребре $1 - 5$.

$$I_{max} = I_{15} = I_{587} + I_{56} = \frac{U}{R} + \frac{U}{R} = 2\frac{U}{R}.$$

3. Максимальная тепловая мощность будет выделяться на тех резисторах, в которых сила тока максимальна. Таких резисторов три: R_{87}, R_{56} и R_{43}. В каждом из них сила тока составляет $I = \dfrac{U}{R}$, а мощность $P_{max} = \dfrac{U^2}{R}$.

4. При переносе контакта из узла 7 в узел 2 изменяются токи во всех резисторах. С помощью новой эквивалентной схемы можно получить:

$$R_{AC} = \frac{5}{11}R; \quad I_{AC} = \frac{11}{5}\frac{U}{R}.$$

Критерии оценивания

Найдена сила тока I_{AB} и сопротивление R_{AB} между клеммами A и B 3
Определено, в каком из ребёр куба сила тока максимальна
и чему она равна 3
Указано, в каких резисторах выделяется максимальная тепловая мощность
и чему она равна 1
Найдена сила тока I_{AC} и сопротивление R_{AC} 3

Задача 5. Составной цилиндр

1. (Графический способ) Допустим, что после того, как в составной цилиндр налили V литров воды, высота столба воды оказалась равной h. Минимальная сила, необходимая для удержания заслонки в прижатом состоянии, равна:

$$F = F_0 + (\rho g S_1) \cdot h,$$

где ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения.

Зависимость $h(V)$ и $F(V)$ для каждого из отрезков труб линейна. Для первой (нижней) трубы справедливо соотношение:

$$\left(\frac{\Delta F}{\Delta V}\right)_1 = \rho g.$$

Для второй (верхней) трубы справедливо соотношение:

$$\left(\frac{\Delta F}{\Delta V}\right)_2 = \frac{\rho g S_1 \Delta h}{S_2 \Delta h} = \rho g \frac{S_1}{S_2}.$$

Построим график зависимости $F(V)$ (рис. 18):

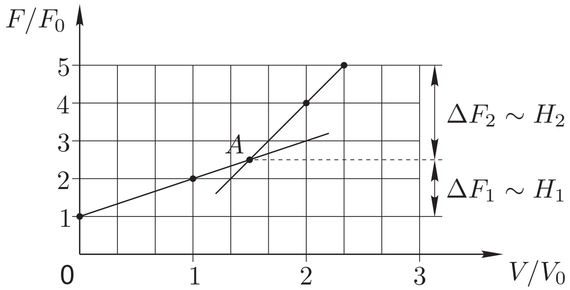

Рис. 18

Из него находим, что отношение угловых коэффициентов

$$\left(\frac{\Delta F}{\Delta V}\right)_2 : \left(\frac{\Delta F}{\Delta V}\right)_1 = \frac{S_1}{S_2} = 3,$$

а отношение

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta F_2} = \frac{\rho g H_1}{\rho g H_2} = \frac{H_1}{H_2} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = \frac{3}{5}.$$

2. (Аналитический способ) Рассмотрим ситуацию после наливания первой порции воды. По условию задачи

$$S_1 h_1 = V_0. \tag{7}$$

Воспользуемся законом Паскаля:

$$F_0 + \rho g h_1 S_1 = 2F_0.$$

Отсюда:

$$F_0 = \rho g h_1 S_1. \tag{8}$$

Теперь рассмотрим ситуацию после наливания второй порции воды. Судя по изменению давления на заслонку, можно предположить, что вода полностью заполнила нижнюю трубу и частично – верхнюю:

$$H_1 S_1 + h_2 S_2 = 2V_0. \tag{9}$$

Согласно закону Паскаля: $F_0 + \rho g(H_1 + h_2)S_1 = 4F_0$. Отсюда:

$$3F_0 = \rho g(H_1 + h_2)S_1. \tag{10}$$

Наконец, рассмотрим ситуацию после наливания третьей порции воды:

$$2V_0 + V_0/3 = H_1 S_1 + H_2 S_2. \tag{11}$$

Согласно закону Паскаля: $F_0 + \rho g(H_1 + H_2)S_1 = 5F_0$. Отсюда:

$$4F_0 = \rho g(H_1 + H_2)S_1. \tag{12}$$

Решая полученную систему уравнений, найдём:

$$S_1 : S_2 = 3 : 1, \quad H_1 : H_2 = 3 : 5.$$

Критерии оценивания

Графическое решение:

Найдена зависимость $F(h)$ 2

Построен график с проведёнными прямыми 4

Аналитическое решение:

Записаны уравнения (1) – (6) (по балу за каждое уравнение) 6

Ответы:

Найдено отношение S_1 к S_2 1

Найдено отношение H_1 к H_2 3