10 класс

Задача 1. Шарик в сосуде с водой

Пусть плотности воды, деревянного и металлического шариков равны ρ, ρ_1 и ρ_2 соответственно, объёмы шариков — V_1 и V_2, расстояние от оси вращения до деревянного шарика R, силы натяжения верхней и нижней нитей T_1 и T_2, угловая скорость вращения ω.

1. Рассмотрим мысленно вместо деревянного шарика шарик из воды. На эти шарики действует одинаковая сила Архимеда (рис. 19).

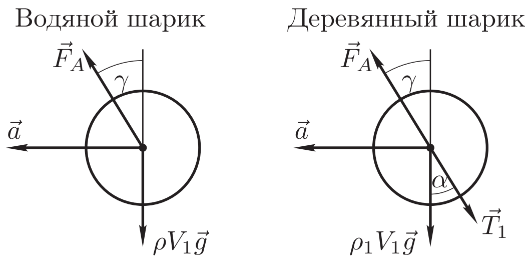

Рис. 19

Ускорение шариков $a = \omega^2 R$. По второму закону Ньютона в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$F_A \sin\gamma = \rho V_1 \omega^2 R, \quad F_A \sin\gamma - T_1 \sin\alpha = \rho_1 V_1 \omega^2 R,$$

$$F_A \cos\gamma = \rho V_1 g, \quad F_A \cos\gamma - T_1 \cos\alpha = \rho_1 V_1 g.$$

Отсюда:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega^2 R}{g}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

Итак, $\gamma = \alpha$, то есть получаем ответ на первый вопрос: сила Архимеда направлена под углом α к вертикали, то есть, вдоль нити.

2. Найдём горизонтальные и вертикальные составляющие сил Архимеда, действующих на шарики (рис. 20):

$$F_{A_1x} = \rho V_1 \omega^2 R, \quad F_{A_1y} = \rho V_1 g,$$

$$F_{A_2x} = \rho V_2 \omega^2 \cdot 3R, \quad F_{A_2y} = \rho V_2 g.$$

По второму закону Ньютона:

$$\begin{cases} F_{A_1x} - T_1 \sin\alpha = \rho_1 V_1 \omega^2 R, \\ F_{A_1y} - \rho_1 V_1 g - T_1 \cos\alpha = 0, \\ F_{A_2x} + T_1 \sin\alpha + T_2 \cos\alpha = \rho_2 V_2 \omega^2 \cdot 3R, \\ F_{A_2y} - \rho_2 V_2 g + T_1 \cos\alpha - T_2 \sin\alpha = 0. \end{cases}$$

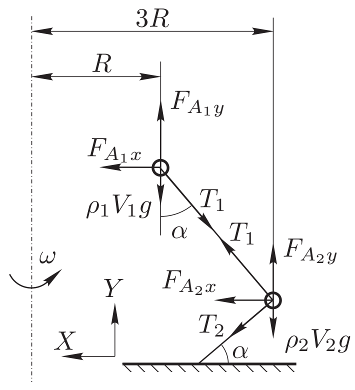

Рис. 20

Из записанных уравнений находим:

$$\begin{cases} (\rho - \rho_1) V_1 \omega^2 R = T_1 \sin\alpha, \\ (\rho - \rho_1) V_1 g = T_1 \cos\alpha, \\ (\rho_2 - \rho) V_2 \omega^2 \cdot 3R = T_1 \sin\alpha + T_2 \cos\alpha, \\ (\rho_2 - \rho) V_2 g = T_1 \cos\alpha - T_2 \sin\alpha. \end{cases}$$

Отсюда:

$$3 \operatorname{tg}\alpha = \frac{x \sin\alpha + \cos\alpha}{x \cos\alpha - \sin\alpha}, \text{ где } x = \frac{T_1}{T_2}.$$

Зная α, находим:

$$x = \frac{T_1}{T_2} = \frac{19}{8}.$$

Критерии оценивания

Направление силы Архимеда, действующей на деревянный шарик:
- Приведено объяснение 2
- Найдено направление 1

Записана система уравнений Ньютона, описывающая движение системы ... 4

Найдено отношение сил натяжения 3

Задача 2. Тепловая машина

1. По теореме Карно

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}; \qquad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Здесь Q_1 и Q_2 — количество теплоты, забираемое от нагревателя и передаваемое холодильнику соответственно.

$$Q_2 = mq, \qquad Q_1 = mq + A_{max}.$$

Следовательно:

$$A_{max} = mq\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) = 2{,}45 \cdot 10^{13} \text{ Дж}.$$

2. Пусть в этом случае Q_2 — количество теплоты, перекаченное тепловым насосом в котёл, Q_1 — количество теплоты, забираемое от Гольфстрима.

$$\frac{Q_2}{T_0} = \frac{Q_1}{T_1}, \qquad Q_2 = \lambda m_{\text{в}}, \qquad Q_1 = Q_2 - A_{max}.$$

Отсюда:

$$\frac{\lambda m_{\text{в}}}{T_1} - \frac{\lambda m_{\text{в}}}{T_0} = \frac{A_{max}}{T_1}, \qquad T_1 < T_0.$$

Следовательно:

$$m_{\text{в}} = \frac{A_{max}}{\lambda\left(1 - \dfrac{T_1}{T_0}\right)} = 5{,}12 \cdot 10^7 \text{ кг}.$$

Критерии оценивания

Записана теорема Карно для первого случая 3
Найдена максимальная работа в первом случае 2
Записана теорема Карно для второго случая 3
Определена максимальная масса испарённой воды во втором случае 2

Задача 3. Адиабатический процесс

Пусть при заполнении сосуда газом снаружи в сосуд перешёл газ, ранее занимавший объём V (рис. 21). Внешнее давление при "продавливании" внутрь этого объёма совершает работу $A_{\text{внеш}} = P_0 V$.

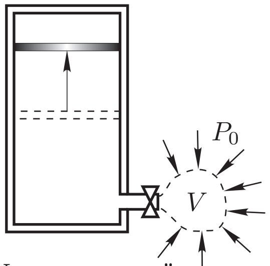

Рис. 21

Закон сохранения энергии для системы газ в сосуде — "внешний" газ объёма V — поршень выглядит так:

$$U_1 + U_2 + A_{\text{внеш}} = U + \Delta E_{\text{п}}, \tag{13}$$

где U_1 — внутренняя энергия исходного газа в сосуде, U_2 — энергия "внешнего" газа из объёма V, U — энергия газа в сосуде после заполнения, $\Delta E_{\text{п}}$ — изменение потенциальной энергии поршня.

$$U_1 = \frac{3}{2}\frac{P_0}{2}V_0; \quad U_2 = \frac{3}{2}P_0 V; \quad U = \frac{3}{2}P_0 2V_0; \tag{14}$$

$$\Delta E_{\text{п}} = mg\Delta h = \frac{P_0}{2}S\Delta h = \frac{P_0}{2}V_0. \tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в уравнение (13), после преобразований получим:

$$\frac{5}{2}P_0 V = \frac{11}{4}P_0 V_0, \tag{16}$$

$$V = \frac{11}{10}V_0. \tag{17}$$

Исходное число молей газа в сосуде $\nu_1 = \dfrac{P_0 V_0}{2RT_0}$, число молей "внешнего" газа в сосуде $\nu_2 = \dfrac{11}{10}\dfrac{P_0 V_0}{RT_0}$. Итого $\nu = \nu_1 + \nu_2 = \dfrac{8}{5}\dfrac{P_0 V_0}{RT_0}$. Из уравнения состояния:

$$\frac{P_0 \cdot 2V_0}{RT} = \frac{8}{5}\frac{P_0 V_0}{RT_0}, \tag{18}$$

откуда:

$$T = \frac{5}{4}T_0. \tag{19}$$

Критерии оценивания

Записан закон сохранения энергии 2
Получены выражения для U_1, U_2, U и $\Delta E_{\text{п}}$
(по баллу за каждую из формул) 4
Найден объём V закачанного газа 1
Записано уравнение состояния для газа,
находящегося в сосуде после установления равновесия 2
Определена конечная температура T газа 1

Задача 4. Слоистый диэлектрик

1. Пусть E_1 и E_2 — напряжённости однородных электрических полей в верхней и нижней пластинах соответственно. Тогда:

$$E_1\frac{d}{2} + E_2\frac{d}{2} = \mathscr{E}. \tag{20}$$

Здесь $E_1 d/2$ и $E_2 d/2$ — падения напряжений на слоях. По закону Ома:

$$E_1\frac{d}{2} = I_1\frac{1}{\lambda_1}\frac{d/2}{S}, \quad E_2\frac{d}{2} = I_2\frac{1}{\lambda_2}\frac{d/2}{S}, \tag{21}$$

где $I_1 = I_2$ — силы токов, текущих в 1-ом и 2-ом слоях, S - площадь пластин конденсатора. Поделив почленно эти соотношения, получим:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{22}$$

Решая систему из двух уравнений (20) и (22), найдём:

$$E_1 = \frac{2\mathscr{E}}{d\left(1 + \lambda_1/\lambda_2\right)}, \quad E_2 = \frac{2\mathscr{E}}{d\left(1 + \lambda_2/\lambda_1\right)}. \tag{23}$$

Найдём теперь поверхностные плотности зарядов на пластинах конденсатора

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 E_1 = \frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d\left(1 + \lambda_1/\lambda_2\right)}; \quad \sigma_2 = -\varepsilon_0 E_2 = -\frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d\left(1 + \lambda_2/\lambda_1\right)}. \tag{24}$$

2. Полный заряд конденсатора, включающий заряды на пластинах и заряд в плоскости контакта слоёв, равен нулю. Пусть σ — поверхностная плотность заряда в плоскости контакта. Условие равенства нулю полного заряда:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma = 0. \tag{25}$$

Отсюда:

$$\sigma = -\sigma_1 - \sigma_2 = -\frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d}\left(\frac{1}{1+\lambda_1/\lambda_2} - \frac{1}{1+\lambda_2/\lambda_1}\right) = -\frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}. \qquad (26)$$

Или, если выразить σ через удельные сопротивления:

$$\sigma = -\frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d}\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}. \qquad (27)$$

Критерии оценивания

Указано соотношение между напряжённостями поля в конденсаторе и напряжением на нём ... 1

Найдено соотношение между напряжённостями E_1 и E_2 поля в диэлектрических слоях ... 1

Определена напряжённость E_1 поля в слое с проводимостью λ_1 ... 1

Определена напряжённость E_2 поля в слое с проводимостью λ_2 ... 1

Найдена поверхностная плоотность заряда σ_1 ... 2

Найдена поверхностная плотность заряда σ_2 ... 2

Найдена поверхностная плотность заряда в плоскости контакта слоёв ... 2

Задача 5. Перезарядка конденсаторов

1. Рассмотрим процессы перезарядки конденсаторов в первом цикле.

$$C_1U_1 + CU_2 = (C_1+C)\,U_1'; \qquad U_1' = \frac{C_1U_1+CU_2}{C_1+C}.$$

$$C_2U_2 + CU_1' = (C_2+C)\,U_2';$$

$$U_2' = \frac{C_2U_2 + C\dfrac{C_1U_1+CU_2}{C_1+C}}{C_2+C} = \frac{C_2C_1U_2 + CC_2U_2 + C_1CU_1 + C^2U_2}{(C_1+C)\,(C_2+C)}.$$

$$\Delta U' = U_2' - U_1' =$$

$$= \frac{C_1C_2U_2 + CC_2U_2 + CC_1U_1 + C^2U_2 - C_1C_2U_1 - CC_2U_2 - CC_1U_1 - C^2U_2}{(C_1+C)\,(C_2+C)} =$$

$$= \frac{C_1C_2}{(C_1+C)\,(C_2+C)}\,(U_2-U_1)\,;$$

$$\frac{\Delta U'}{(\Delta U)_0} = \frac{C_1C_2}{(C_1+C)\,(C_2+C)} = A < 1$$

Таким образом, после каждого цикла разность напряжений на конденсаторах уменьшается в $\left(\dfrac{1}{A}\right)$ раз. После n циклов разность напряжений уменьшится в $\left(\dfrac{1}{A}\right)^n$ раз. По условию задачи

$$\left(\frac{1}{A}\right)^{44} = 100 \Rightarrow \frac{1}{A} = \left(1+\frac{C}{C_1}\right)\left(1+\frac{C}{C_2}\right) = \sqrt[44]{100} \approx 1{,}11.$$

Как видим, должны выполняться неравенства: $C \ll C_1$, $C \ll C_2$. Пренебрегая членами второго порядка малости относительно C/C_1 и C/C_2, можем записать:

$$\frac{1}{A} - 1 \approx C\cdot\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) = 0{,}11.$$

Подставляя значения величин C_1 и C_2, получим:

$$C = 1\,\text{мкФ}.$$

2. После большого числа циклов напряжения на всех конденсаторах окажутся одинаковыми (U_∞) и их можно соединить параллельно. При этом заряд батареи конденсаторов равен первоначальному заряду конденсаторов:

$$C_1U_1 + C_2U_2 + CU_2 = (C_1+C_2+C)\,U_\infty,$$

$$U_\infty = \frac{C_1U_1+C_2U_2+CU_2}{C_1+C_2+C} = \frac{9U_1+10U_2}{19} = 136\ \text{В}.$$

3. $(W_э)_0 = \dfrac{C_1U_1^2}{2} + \dfrac{(C_2+C)\,U_2^2}{2} = \dfrac{18\cdot(76)^2}{2}\cdot 10^{-6} + \dfrac{20\cdot(190)^2}{2}\cdot 10^{-6} =$ $= 0{,}413$ Дж.

$$(W_э)_\infty = \frac{(C_1+C_2+C)\,U_\infty^2}{2} = \frac{38\cdot(136)^2}{2}\cdot 10^{-6} = 0{,}351\ \text{Дж}.$$

На резисторе выделится тепловая энергия $Q = \Delta W_э$.

$$Q = \Delta W_э = (W_э)_0 - (W_э)_\infty = 0{,}062\text{Дж}.$$

Критерии оценивания

Записано выражение для U_1' 1
Записано выражение для U_2' 1
Получено выражение, связывающее $\Delta U'$ с ΔU 2
Определена ёмкость конденсатора C 2
Записан закон сохранения заряда для установившегося напряжения 2
Найдено установившееся напряжение 1
Определена тепловая энергия, выделившаяся на резисторе R 1