Условия задач

9 класс

9.5. Для некоторых 2011 натуральных чисел выписали на доску все их $2011 \cdot 2010/2$ попарных сумм. Могло ли оказаться, что ровно треть выписанных сумм делится на 3, и ещё ровно треть из них дают остаток 1 при делении на 3? (*И. Богданов*)

9.6. У Пети и Коли в тетрадях записаны по два числа; изначально — это числа 1 и 2 у Пети, 3 и 4 — у Коли. Раз в минуту Петя составляет квадратный трёхчлен $f(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа, а Коля — квадратный трёхчлен $g(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа. Если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет два различных корня, то один из мальчиков заменяет свою пару чисел на эти корни, иначе ничего не происходит. Какое второе число могло оказаться у Пети в тетради в тот момент, когда первое стало равным 5? (*И. Богданов, А. Гарбер*)

9.7. Пусть ABC — правильный треугольник. На его стороне AC выбрана точка T, а на дугах AB и BC его описанной окружности выбраны точки M и N соответственно так, что $MT \parallel BC$ и $NT \parallel AB$. Отрезки AN и MT пересекаются в точке X, а отрезки CM и NT — в точке Y. Докажите, что периметры многоугольников $AXYC$ и $XMBNY$ равны. (*В. Шмаров*)

9.8. В некоторых клетках доски 100×100 стоит по фишке. Назовём клетку *красивой*, если в соседних с ней по стороне клетках стоит чётное число фишек. Может ли ровно одна клетка доски быть красивой? (*К. Кноп*)