11 класс

11.5. Даны два различных кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$ с единичными старшими коэффициентами. Выписали все корни уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$, $F(x) = G(x)$. Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$. (*И. Богданов*)

11.6. На столе лежит куча из более, чем n^2 камней. Петя и Вася по очереди берут камни из кучи, первым берёт Петя. За один ход можно брать любое простое число камней, меньшее n, либо любое кратное n число камней, либо один камень. Докажите, что Петя может действовать так, чтобы взять последний камень независимо от действий Васи. (*С. Берлов*)

11.7. Для натурального a обозначим через $P(a)$ наибольший простой делитель числа $a^2 + 1$. Докажите, что существует бесконечно много троек различных натуральных чисел a, b, c таких, что $P(a) = P(b) = P(c)$. (*А. Голованов*)

11.8. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

(*М. Кунгожин*)