11 класс

11.5. Заметим, что у многочленов $F(x)$ и $G(x)$ не более, чем по три корня, а у многочлена $F(x) - G(x)$ (имеющего степень, не превосходящую 2) не больше двух корней. Поскольку у них в совокупности 8 корней, то у $F(x)$ и $G(x)$ ровно по три корня, а у $F(x) - G(x)$ ровно два, причём все они имеют кратность 1.

Предположим, что утверждение задачи неверно; пусть a и b — минимальное и максимальное из выписанных чисел, и $F(a) = F(b) = 0$. Поскольку все корни $G(x)$ лежат на интервале (a, b), имеем $G(a) < 0$, $G(b) > 0$. С другой стороны, квадратный трёхчлен $F(x) - G(x)$ имеет два корня на этом интервале, поэтому значения $F(a) - G(a) = -G(a)$ и $F(b) - G(b) = -G(b)$ должны иметь одинаковый знак. Противоречие.

11.6. Предположим противное: Вася может всегда действовать так, чтобы помешать Пете; поскольку в любой ситуации, кроме конечной, можно сделать ход, это означает, что у Васи есть стратегия, поволяющая ему гарантированно взять последний камень. Пусть d — изначальное количество камней, а r — остаток от деления d на n. Ясно, что $r \neq 0$, иначе Петя может сразу взять все камни.

Петя после первого своего хода может, взяв кратное n количество камней, оставить любое количество вида $a_k = r + nk$, где $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ (все эти количества меньше n^2). Пусть c_k — ответный ход в Васиной стратегии при a_k камнях в куче. Тогда c_k не делится на n, иначе после его хода остаётся $r + n\left(k - \frac{c_k}{n}\right)$ камней, и Петя может выиграть, действуя по Васиной стратегии для этого числа. Значит, $c_k < n$ при всех $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, а тогда два из этих чисел совпадают, скажем, $c_k = c_\ell$ при $0 \leqslant k < \ell \leqslant n - 1$. Напомним, что у Васи есть стратегия выигрыша в ситуации, когда в куче $a_k - c_k$ камней и ход Пети.

Пусть теперь Петя первым ходом оставит a_ℓ камней; Вася в ответ возьмёт c_ℓ камней. Теперь Петя может взять $n(\ell - k)$ камней, оставляя $a_\ell - c_\ell - n(\ell - k) = a_k - c_k$, и дальше действовать по вышеупомянутой Васиной стратегии. Таким образом, он выиграет — противоречие.

11.7. Сделаем сначала замечание, общее для всех трёх решений. Пусть p — нечётное простое число, а $a < p$ — натуральное число такое, что $a^2 + 1 \,\vdots\, p$; тогда числа a и $p - a$ различны, и $P(a) = P(p - a) = p$. Действительно, числа $a^2 + 1$ и $(p - a)^2 + {} + 1 = (a^2 + 1) + p(p - 2a)$ делятся на p и меньше p^2; значит, они не могут делиться на простые числа, бо́льшие p.

Первое решение. Предположим противное. Тогда существует лишь конечное число простых чисел p, для которых уравнение $P(x) = p$ имеет хотя бы три натуральных решения. Обозначим через s максимальное такое простое число (если таких простых не существует, положим $s = 2$), а через S — произведение всех простых чисел, не превосходящих s.

Пусть $p = P(S)$; тогда p взаимно просто с S и потому $p > s$. Пусть a — остаток от деления S на p; тогда $a^2 + 1 \vdots p$, значит, $P(a) = P(p - a) = p$. Одно из чисел a и $p - a$ чётно; обозначим его через b. из чисел a и $p - a$, которое чётно.

Далее, число $(b + p)^2 + 1$ делится на $2p$ (ибо b чётно, а p — нет), поэтому $P(b + p) \geqslant p$. Если $P(b + p) = p$, то уравнение $P(x) = p$ имеет три решения — b, $p - b$, $p + b$; это невозможно по предположению. Значит, $P(b + p) = q > p$, число $(b + p)^2 + 1$ делится на $2pq$ и потому не меньше, чем $2pq$. Это означает, что $q < b + p$ (в противном случае $(b + p)^2 + 1 \leqslant (2p - 1)q + 1 < 2pq$).

Наконец, обозначая через c остаток от деления числа $b + p$ на q, получаем $P(c) = P(q - c) = P(b + p) = q > p > s$, что противоречит выбору s.

Второе решение. Мы будем использовать тождество
$$(m^2 + 1)((m - 1)^2 + 1) = (m^2 - m + 1)^2 + 1, \qquad (*)$$
которое можно проверить, например, раскрытием скобок. Из него следует, что $P(m^2 - m + 1) = \max(P(m), P(m + 1))$.

Предположим противное. Пусть N — наибольшее число, встречающееся в описанных тройках; если таких троек нет, то положим $N = 3$. Последовательность натуральных чисел $P(N + 1), P(N + 2), \ldots$ не может строго убывать. Значит, найдётся число $n > N + 1$, для которого $P(n - 1) \leqslant P(n)$. Тогда $P(n^2 - n + 1) = \max(P(n), P(n - 1)) = P(n)$. Поэтому найдётся число $n \leqslant m \leqslant n^2 - n + 1$ такое, что $P(m - 1) \leqslant P(m) \geqslant P(m + 1)$; иначе $P(n - 1) \leqslant P(n) < P(n + 1) < \ldots < P(n^2 - n + 1)$, что не так.

Теперь из $(*)$ имеем $P(m^2 - m + 1) = \max(P(m), P(m - 1)) = P(m)$ и $P(m^2 + m + 1) = \max(P(m), P(m + 1)) = P(m)$. Таким образом, тройка $m, m^2 - m + 1, m^2 + m + 1$ удовлетворяет условию, и $m > N$; противоречие с выбором числа N.

Третье решение. Для любого натурального $n \geqslant 1$ рассмотрим число $(2 + \sqrt{5})^{2n+1}$; оно имеет вид $a_n + b_n\sqrt{5}$ при некоторых натуральных a_n, b_n (ясно, что $a_n < a_{n+1}$). Заметим, что

тогда $(2 - \sqrt{5})^{2n+1} = a_n - b_n\sqrt{5}$, откуда
$a_n^2 - 5b_n^2 = (a_n + b_n\sqrt{5})(a_n - b_n\sqrt{5}) = ((2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}))^{2n+1} = -1$. Тогда $a_n^2 + 1 = 5b_n^2$; ясно, что $b_n < a_n$ и $a_n \geqslant 2^{2n+1} \geqslant 8$, поэтому все простые делители числа $a_n^2 + 1$ не превосходят $\max(5, b_n) < a_n$.

Итак, $p_n = P(a_n) < a_n$. С другой стороны, $a_n^2 + 1 \vdots 5$, значит, $p_n \geqslant 5$. Обозначим теперь через c_n остаток от деления a_n на p_n. Тогда числа $c_n, p_n - c_n, a_n$ различны и $P(c_n) = P(p_n - c_n) = P(a_n)$. Мы предъявили бесконечно много различных троек требуемого вида.

Замечание. Уравнение вида $x^2 - Dy^2 = a$ называется *уравнением Пелля.* Известно, что, если D не является квадратом, и это уравнение имеет хотя бы одно решение в натуральных числах, то оно имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

11.8. **Первое решение.** Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а J_1 и J_2 — центры его вневписанных окружностей ω_1 и ω_2, касающихся сторон AB и AC, соответственно. Прямая AN является внешней биссектрисой угла BAC, поэтому точки J_1 и J_2 лежат на ней. Пусть K_1 и K_2 — точки касания ω_1 и ω_2 соответственно с прямой BC; тогда прямые NM, J_1K_1 и J_2K_2 перпендикулярны BC. Кроме того, $BK_1 = \dfrac{AB + AC - BC}{2} = CK_2$, поэтому $MK_1 = MK_2$. По теореме Фалеса получаем $NJ_1 = NJ_2$.

Далее, $\angle J_1BJ_2 = \angle J_1CJ_2 = 90^\circ$ как углы между внутренней и внешней биссектрисами. Значит, точки B и C лежат на окружности с диаметром J_1J_2, поэтому $\angle BCJ_1 = \angle BJ_2J_1$. Тогда треугольники IBC и IJ_1J_2 подобны по двум углам, а точки M и N соответственны в этих треугольниках как середины сторон.

Пусть описанная окружность γ треугольника AI_1I_2 пересекает вторично прямые CI и BI в точках P_1 и P_2 соответственно (см. рис. 6). Заметим, что $\angle I_1P_1I_2 = \angle I_1P_2I_2 = \angle I_1AI_2 = \frac{1}{2}\angle BAC$. С другой стороны, $\angle BIP_1 = \angle IBC + \angle ICB =$

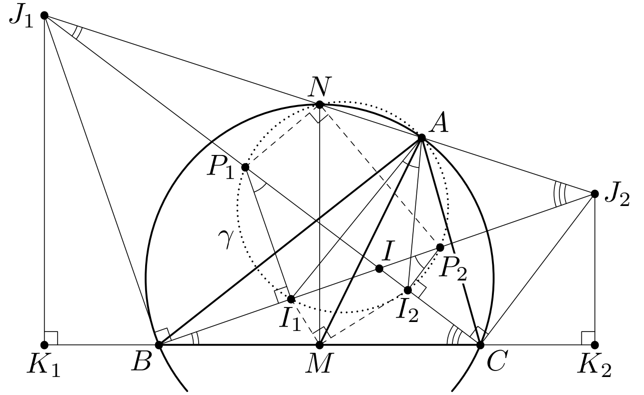

Рис. 6

$= \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ - \angle I_1P_1I$; значит, $\angle P_1I_1P_2 = \angle P_1I_2P_2 = 90^\circ$, и точки P_1 и P_2 диаметрально противоположны на γ. Кроме того, прямые P_1I_1 и BJ_1 перпендикулярны BJ_2, поэтому $\frac{II_1}{IP_1} = \frac{IB}{IJ_1}$, и точки I_1 и P_1 соответственны в треугольниках IBC и IJ_1J_2. Аналогично, точки I_2 и P_2 также соответственны, откуда $\angle P_1NP_2 = \angle I_1MI_2 = 90^\circ$. Это значит, что точка N лежит на окружности с диаметром P_1P_2, то есть на γ. Это и требовалось доказать.

Второе решение. Заметим, что прямоугольные треугольники BMN и CMN симметричны относительно MN. Пусть точка I_2' симметрична I_2 относительно MN. Имеем $\angle BMI_1 + \angle BMI_2' = \angle BMI_1 + \angle CMI_2 = \frac{1}{2}(\angle BMA + \angle CMA) = 90^\circ = \angle BMN$, поэтому лучи MI_1 и MI_2' симметричны относительно биссектрисы угла BMN. Далее, $\angle MBI_1 + \angle MBI_2' = \angle MBI_1 + \angle MCI_2 = \frac{1}{2}(\angle MBA + \angle MCA) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BNC = 90^\circ - \angle BNM = \angle MBN$, поэтому лучи BI_1 и BI_2' симметричны относительно биссектрисы угла MBN.

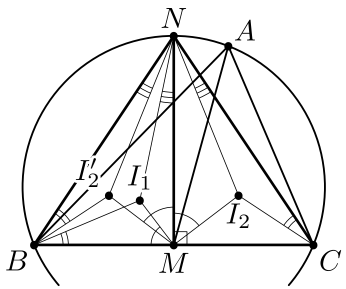

Рис. 7

Отсюда следует, что точки I_1 и I_2' — *изогонально сопряжённые точки* в треугольнике BMN, а следовательно, и лучи NI_1 и NI_2' симметричны относительно биссектрисы угла MNB. Значит, $\angle BNM = \angle MNI_1 + \angle MNI_2'$. Получаем: $\angle I_1AI_2 = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle BNM = \angle MNI_1 + \angle MNI_2' = \angle MNI_1 + \angle MNI_2 = I_1NI_2$. Это и означает, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.