11 класс

11.1. Поскольку числа $f = n/d$ и $f' = n/d'$ целые, а $f > f'$, имеем $f - f' \geqslant 1$, или

$$1 \leqslant \frac{n}{d} - \frac{n}{d'} = \frac{(d'-d)n}{dd'} < \frac{(d'-d)n}{d^2}.$$

Домножая на $\frac{d^2}{n}$, получаем $d' - d > \frac{d^2}{n}$, что и требовалось доказать.

11.2. **Первое решение.** Докажем сначала следующий известный факт.

Лемма. *Ортоцентр треугольника после отражения относительно стороны попадает на описанную окружность.*

Доказательство. Рассмотрим случай остроугольного треугольника (см. рис. 4; остальные случаи аналогичны). Имеем $\angle AH'C = \angle AHC = \angle A_1HC_1 = 180^\circ - \angle ABC$; это и означает, что точки A, B, C, H' лежат на одной окружности. □

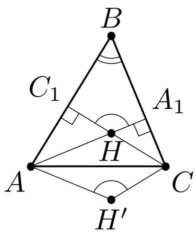

Рис. 4

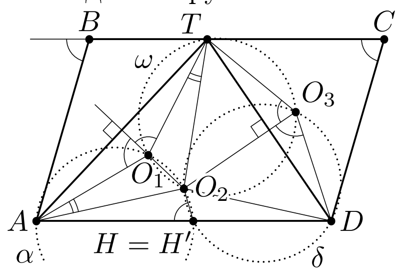

Рис. 5

Перейдём к решению задачи. Заметим, что O_1O_2 и O_3O_2 — серединные перпендикуляры к отрезкам AT и DT. Значит, $\angle AO_1O_2 = \angle TO_1O_2 = \angle TBA$ (поскольку угол TO_1A — центральный для описанной окружности треугольника ABT). Аналогично, $\angle DO_3O_2 = \angle TO_3O_2 = \angle TCD$. Отсюда $\angle TO_1O_2 +$

$+\ \angle TO_3O_2 = 180^\circ$. Итак, точки T, O_1, O_2, O_3 лежат на одной окружности ω. Из симметрии, $\angle O_1TO_2 = \angle O_1AO_2$. Значит, окружность α, описанная около треугольника AO_1O_2, равна ω. Аналогично, окружность δ, описанная около треугольника DO_2O_3, также равна ω.

По лемме, ортоцентр H треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на окружностях α и δ, то есть является второй точкой их пересечения. Пусть H' — вторая точка пересечения α с прямой AD. Тогда $\angle AH'O_2 = 180^\circ - \angle AO_1O_2 = \angle DO_3O_2$, поэтому H' лежит на δ. Значит, $H' = H$, и H лежит на AD.

Второе решение. Опять же заметим, что O_1O_2 и O_2O_3 — серединные перпендикуляры к отрезкам AT и DT. Значит, высоты из вершин O_1 и O_3 треугольника $O_1O_2O_3$ параллельны соответственно прямым DT и AT. Пусть H — точка пересечения высоты из точки O_1 со стороной AD; наша задача, таким образом — показать, что $O_3H \parallel AT$.

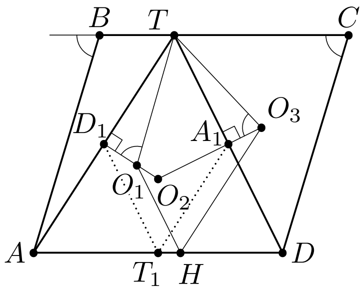

Рис. 6

Обозначим через A_1, D_1 и T_1 середины сторон DT, AT и AD треугольника ADT соответственно, а через α, δ, τ — его углы при вершинах A, D, T соответственно. Тогда $\angle TO_1D_1 = 180^\circ - \angle ABC = \angle BCD = \angle TO_3A_1$. Значит, прямоугольные треугольники TO_1D_1 и TO_3A_1 подобны, и $\frac{D_1O_1}{A_1O_3} = \frac{D_1T}{A_1T} = \frac{AT}{DT} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}$.

Далее, поскольку $O_1H \parallel D_1T_1$, расстояния от точек O_1 и H до прямой D_1T_1 равны, то есть $\frac{T_1H}{D_1O_1} = \frac{\sin O_1D_1T_1}{\sin HT_1D_1} = \frac{\cos\tau}{\sin\delta}$. В итоге имеем

$$\frac{T_1H}{A_1O_3} = \frac{T_1H}{D_1O_1}\cdot\frac{D_1O_1}{A_1O_3} = \frac{\cos\tau}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\alpha} = \frac{\cos\tau}{\sin\alpha},$$

или $\frac{T_1H}{A_1O_3} = \frac{\sin O_3A_1T_1}{\sin A_1T_1H}$. Это означает, что O_3 и H равноудалены от A_1T_1, то есть $O_3H \parallel A_1T_1$, что и требовалось доказать.

11.3. Будем говорить, что две темы *пересекаются* по академику, если он интересуется обеими этими темами.

Выберем наибольшее возможное количество непересекающихся тем; пусть это темы $T_1, \ldots, T_k$. Предположим, что $k \leqslant 249$. Обозначим через S множество всех академиков, не интересующихся этими темами; тогда их ровно $s = 999 - 3k \geqslant 252$.

Для каждых двух академиков $a, b \in S$ существует единственная тема $T(a,b)$, интересующая обоих. При этом третий академик, заинтересованный ею, не должен принадлежать S, иначе $T(a,b)$ можно добавить к исходным k темам. Значит, его интересует какая-то тема T_i. Сопоставим эту тему (и этого академика) паре (a,b).

Итак, каждой из $\frac{s(s-1)}{2}$ пар академиков из S сопоставлена одна из k тем $T_1, \ldots, T_k$; значит, какая-то тема T_i сопоставлена не менее, чем $\frac{s(s-1)}{2k} > \frac{s}{2}$ парам. Обозначим эти пары $(a_1,b_1), \ldots, (a_d,b_d)$; пусть T_i интересует академиков x, y, z. Поскольку $d > \frac{s}{2} > 6$, один из x, y, z сопоставлен хотя бы трём парам (a_j,b_j); пусть, скажем, x сопоставлен парам $(a_1,b_1), \ldots, (a_p,b_p)$ $(p \geqslant 3)$, а остальным парам сопоставлены y или z.

Заметим, что все пары $(a_1,b_1), \ldots, (a_p,b_p)$ не пересекаются: если бы академик a находился в двух из них, то академиков a и x интересовали бы две общих темы. Значит, $p \leqslant \frac{s}{2} < d$, и паре (a_{p+1},b_{p+1}) сопоставлен, скажем, академик y. Но тогда (a_{p+1},b_{p+1}) не пересекается с одной из пар (a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3), скажем, с (a_1,b_1). Значит, можно из нашего набора тем выбросить T_i и добавить непересекающиеся темы $T(a_1,b_1)$ и $T(a_{p+1},b_{p+1})$, увеличив количество непересекающихся тем. Противоречие с исходным выбором.

11.4. Введём в пространстве систему координат $Oxyt$. Обозначим через M точку шоссе, в которой в начальный момент находится первый автомобиль. Каждой точке шоссе A сопоставим точку T_A на плоскости Oxy с координатами $T_A(x_A, y_A)$, где x_A — суммарная длина участков пути AM в населённых пунктах, а y_A — вне населённых пунктов. Тогда шоссе изображается некоторой ломаной на этой плоскости.

Далее, для i-й машины нарисуем график её движения, состоящий из всех точек $X_{i,A} = (x_A, y_A, t_{i,A})$, где $t_{i,A}$ — момент времени, в который эта машина находилась в точке A. Если эта машина была в точке M в момент t_i, а скорости этой машины в населённых пунктах и вне их равны u_i и v_i, то $t_{i,A} = t_i + x_A/u_i + y_A/v_i$; таким образом, весь график движения i-й машины лежит в плоскости $t = t_i + x/u_i + y/v_i$. Обозначим эту плоскость через α_i.

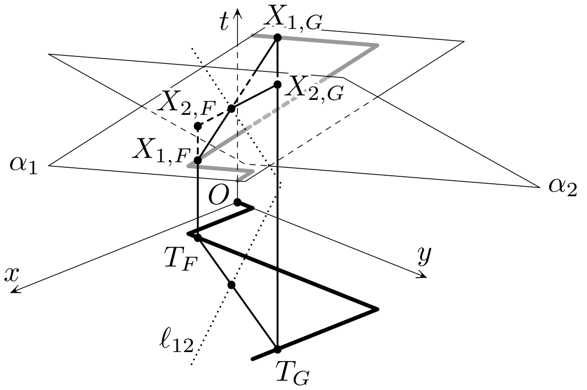

Рис. 7

Рассмотрим теперь порядок, в котором машины проедут мимо некоторого флажка F. Он совпадает с порядком, в котором плоскости α_i будут пересекать прямую, параллельную Ot и проходящую через точку T_F. Пусть для двух флажков F и G этот порядок различается (скажем, 1-я и 2-я машины проехали мимо него в разном порядке). Тогда отрезки $X_{1,F}X_{1,G}$ и $X_{2,F}X_{2,G}$ пересекаются (см. рис. 7). Таким образом, если спроецировать прямую пересечения плоскостей α_1 и α_2 на плоскость Oxy, то точки T_F и T_G будут лежать по разные стороны от полученной проекции ℓ_{12}.

Итак, рассмотрим все прямые ℓ_{ij}. Нетрудно показать индукцией по n, что n прямых разбивают плоскость не более, чем на $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ часть. Поскольку количество наших прямых не больше $C_{10}^2 = 45$, они разобьют плоскость не более, чем на $\dfrac{45 \cdot 46}{2} + 1 = 1036$ частей. Значит, найдутся такие флажки F и G, что точки T_F и T_G попадают в одну часть. Тогда ни одна проекция прямых их не разделяет, поэтому на этих флажках порядок машин будет одинаков.

Замечание. Заметим, что 45 прямых разбивают плоскость ровно на 1036 частей только тогда, когда никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. В нашем случае для любых трёх плоскостей α_i, α_j, α_k прямые их пересечения либо попарно параллельны, либо пересекаются в одной точке. Значит, этим же свойством обладают и их проекции; таким образом, прямые из решения разобьют плоскость несколько меньше, чем на 1036 частей.