## 11 класс

### 1 ЭХО КОСМИЧЕСКОГО ВЗРЫВА
О.С. Угольников

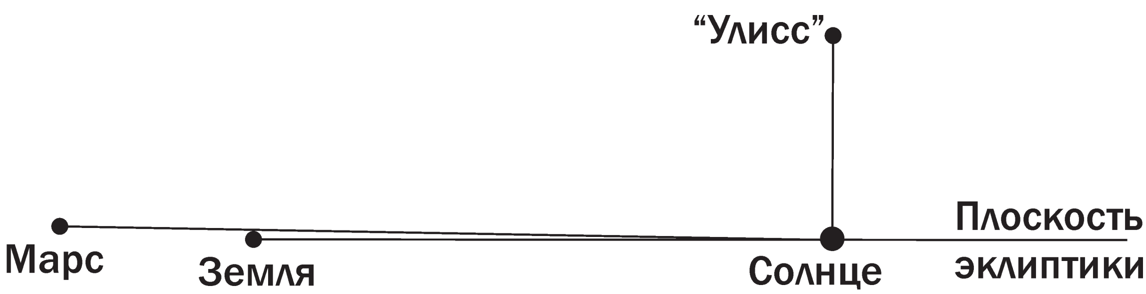
**? Мощный короткий гамма-импульс от далекой сверхновой звезды был одновременно зафиксирован 12 апреля на искусственных спутниках Земли и Марса, а также на космической станции «Улисс», расположенной в этот момент над северным полюсом Солнца. В каком созвездии находилась сверхновая звезда, если Марс в этот день был в противостоянии с Солнцем? Наклоном плоскости экватора Солнца к плоскости эклиптики пренебречь.**

! В момент, описанный в условии задачи, планета Марс оказывается в противостоянии с Солнцем. Гелиоцентрические эклиптические долготы Земли и Марса в этот момент совпадают. Если мы построим рисунок в плоскости, перпендикулярной плоскости эклиптики и пересекающей ее по линии «Солнце-Земля», то Марс также попадет в плоскость рисунка (хотя он может и не лежать точно на продолжении линии «Солнце-Земля»).

По условию задачи, мы пренебрегаем наклоном плоскости солнечного экватора к плоскости эклиптики (в реальности эти две плоскости образуют угол в 7°, который не влияет на ответ данной задачи). Межпланетная станция «Улисс» располагается над северным полюсом Солнца, линия «Солнце-Улисс» перпендикулярна плоскости эклиптики. Таким образом, «Улисс» также располагается в плоскости рисунка.

Итак, Земля, Марс и «Улисс» находятся в картинной плоскости, но при этом не лежат на одной прямой. Во всех трех точках данной плоскости короткий гамма-импульс от сверхновой звезды фиксируется одновременно. Это может быть только в том случае, если направление на сверхновую звезду перпендикулярно плоскости рисунка (иначе наблюдалась бы временная задержка, связанная с конечностью скорости света).

Линия, перпендикулярная плоскости рисунка, лежит в плоскости эклиптики и перпендикулярна линии «Солнце-Земля». Она пересекает небесную сферу в точках, в которых мы можем видеть Солнце за 3 месяца до и после даты наблюдения, то есть около 12 января и 12 июля. Эти точки располагаются в созвездиях Стрельца и Близнецов. В одном из этих созвездий и вспыхнула сверхновая звезда.



## 2 ОРБИТАЛЬНЫЙ РАДИОТЕЛЕСКОП

О.С. Угольников

**? Российский космический радиотелескоп «Радиоастрон» будет выведен на эллиптическую орбиту с расстоянием в апогее 330 000 км. Вместе с наземными радиотелескопами он образует интерферометр со сверхдлинной базой. С каким наилучшим пространственным разрешением можно будет изучать область активного ядра галактики, имеющей красное смещение 0.5? «Радиоастрон» будет работать на длинах волн от 1.35 до 90 см.**

! При совместной работе орбитального радиотелескопа и сети наземных радиотелескопов метод радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой (РСДБ) позволяет достигнуть углового разрешения

$$\rho = \frac{\lambda}{L},$$

где $\lambda$ – длина волны излучения, $L$ – расстояние между космическим радиотелескопом и Землей. Из этой формулы видно, что наилучшее разрешение будет достигнуто при минимальной возможной длине волны и максимальном расстоянии. Для «Радиоастрона» минимальная длина волны составляет 1.35 см, а максимальное расстояние – 330 000 км. Таким образом, предельное угловое разрешение $\rho$ будет равно $4 \cdot 10^{-11}$ радиан или 8 микросекунд дуги.

Для определения пространственного разрешения при изучении активного ядра галактики нам необходимо знать расстояние до него. Задача имеет оценочный характер, а красное смещение $z$ меньше единицы, мы можем пользоваться простыми формулами. Скорость удаления галактики составляет

$$v = c \cdot z,$$

а расстояние до активного ядра

$$D = \frac{v}{H} = \frac{c\,z}{H}$$

или 2 Гпк. Здесь $H$ – постоянная Хаббла. Наилучшее пространственное разрешение составит

$$R = D \cdot \rho = \frac{c\,z\,\lambda}{H\,L} = 0.08 \text{ пк.}$$

# III 3 ЗАТМЕНИЕ В КОСМОСЕ

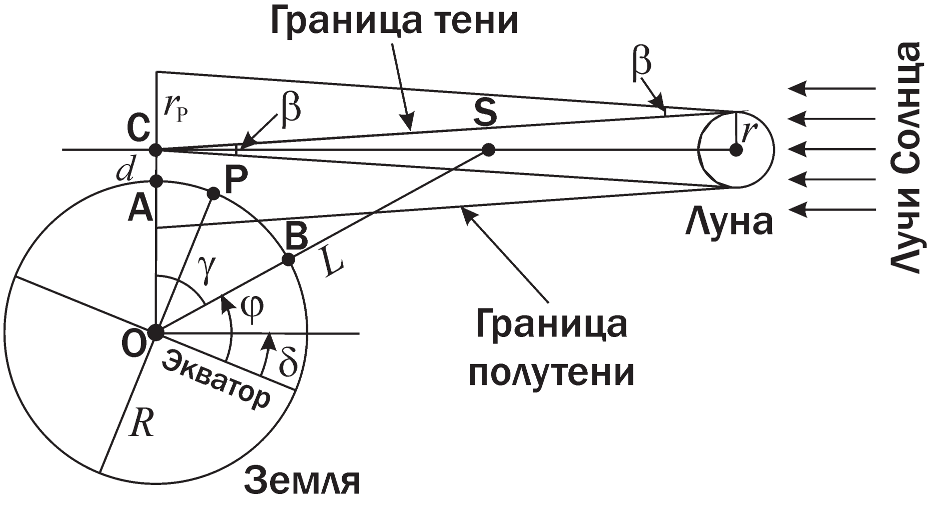
О.С. Угольников

**? В ночь с 1 на 2 июня 2011 года произойдет частное солнечное затмение. Его максимальная фаза, видимая на Земле, составит 0.60 и будет видна в $21^{ч}16^{м}$ по Всемирному времени в светлую солнечную полночь на севере территории России. Угловые диаметры Солнца и Луны при этом будут одинаковыми и составят 31.5′. Представьте, что в этот же момент космонавты на борту некой орбитальной станции наблюдают центральное полное солнечное затмение. Над какой точкой поверхности Земли они в это время находятся? Определите координаты этой точки. Орбита станции – геосинхронная, круговая с периодом в одни звездные сутки, плоскость орбиты наклонена к плоскости земного экватора.**

**!** Рассмотрим момент наибольшей фазы затмения, видимой на Земле. Изобразим Землю и Луну в плоскости, содержащей также Солнце, расположенное за границей рисунка.

Затмение видно на Земле как частное, и линия, соединяющая центры Солнца и Луны, на Землю не попадает. Наибольшая фаза частного солнечного затмения наблюдается в местную полночь в точке **A**, ближайшей к этой линии. При наблюдении из этой точки Солнце и Луна имеют одинаковый видимый диаметр β. Продолжим линию **OA** на рисунке за пределы Земли. Она пересечет линию «Солнце-Луна» в точке **C**. В этой точке будет наблюдаться центральное солнечное затмение. Отрезок **AC** перпендикулярен направлению на Солнце и Луну, и в точке **C** видимые диаметры Солнца и Луны будут также равны β. Фаза затмения, наблюдаемого в точке **C**, будет в точности равна единице, а сама точка **C** есть вершина конуса лунной тени.

Солнце значительно дальше от Земли, чем Луна. При наблюдении с Луны видимый диаметр Солнца будет практически таким же. Следовательно, полутень Луны, окружающая ее тень, в проекции на плоскость рисунка будет выглядеть как два конуса с тем же углом раствора β. Радиус полутени $r_P$ вблизи Земли будет равен удвоенному радиусу Луны $r$.



На отрезке **CA** линейная фаза затмения убывает линейно при удалении от точки **C**, уменьшаясь до нуля на расстоянии $r_P$. В точке **A** фаза частного затмения будет равна

$$F = 1 - \frac{d}{r_P} = 1 - \frac{d}{2r},$$

где $d$ – длина отрезка **CA** или расстояние от точки **A** до вершины конуса тени. Отсюда мы получаем

$$d = 2r(1-F).$$

Так как в точке **A** в текущий момент полночь, и Солнце проходит точку нижней кульминации, плоскость меридиана в этой точке совпадает с плоскостью рисунка. Следовательно, плоскость рисунка содержит и северный полюс Земли. Обозначим его как **P** и отметим также проекцию земного экватора. Затмение происходит 1 июня, и северный полюс освещен Солнцем. Склонение Солнца $\delta$ в это время близко к величине наклона экватора к эклиптике, 23.4° (в реальности оно составляет около +22°).

Космическая станция находится на круговой геосинхронной орбите. Период ее обращения составляет один звездные сутки ($23^{ч}56^{м}04^{с}$). Радиус орбиты равен

$$L = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

или 42.16 тыс. км. Чтобы космонавты в этот момент наблюдали центральное полное солнечное затмение, они должны находиться на оси тени, причем ближе к Луне, чем точка **C** (иначе затмение было бы кольцеобразным). Обозначим положение орбитальной станции как **S**. Угол $\gamma$ с вершиной в центре Земли, образованный направлениями на станцию и точку **A**, равен

$$\gamma = \arccos\frac{R+d}{L} = \arccos\frac{R+2r(1-F)}{L} = 79^{\circ}.$$

Отсюда мы получаем значение широты точки поверхности Земли **B**, над которой находится станция:

$$\varphi = 90^{\circ} - \gamma + \delta = 33^{\circ}.$$

Чтобы определить долготу этой точки, обратим внимание, что она располагается с другой стороны от полюса по отношению к точке **A**. Тогда в указанный момент в точке **B** должен наступить солнечный полдень. Этот момент соответствует $21^{ч}16^{м}$ по Всемирному времени ($UT$). Долгота меридиана, на котором в это время наступает полдень, составляет

$$\lambda = 12^{ч} - UT = -9^{ч}16^{м}$$

или 139° з.д. Данная точка располагается в Тихом океане. Интересно, что в самой этой точке солнечное затмение видно не будет.

## III 4 ЗЕРКАЛЬНО-БЕЛЫЙ СТРАННИК

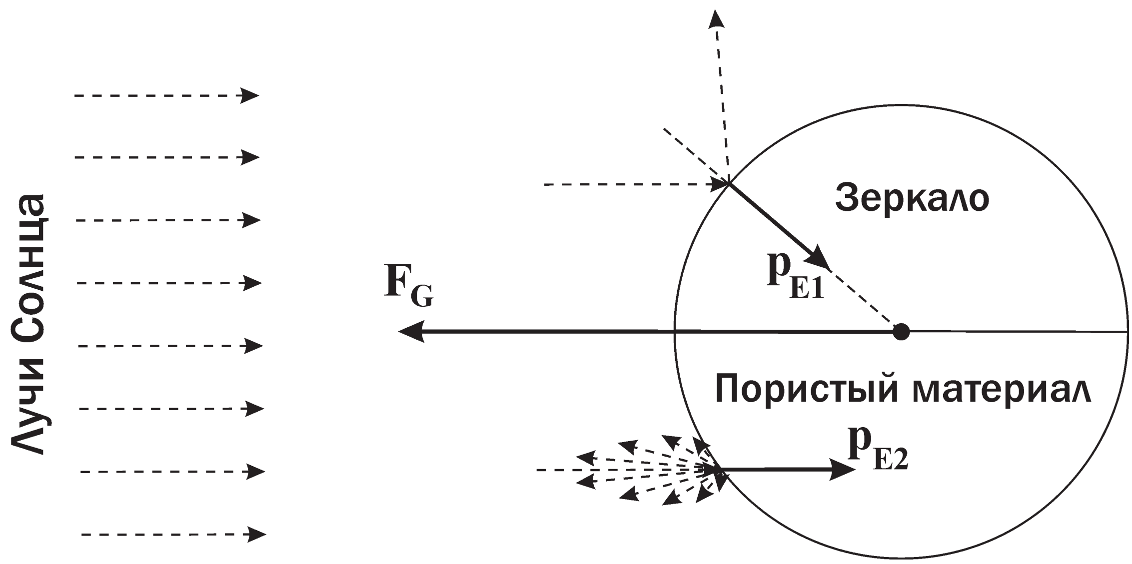
О.С. Угольников

**? Для изучения межпланетной среды в Солнечную систему запущен аппарат-зонд нового поколения. Он имеет сферическую форму, очень малые размеры и состоит из сверхлегких материалов. Одно его полушарие покрыто идеально отражающим зеркальным слоем, а другое – белым пористым материалом, похожим на снег, также отражающим 100% падающего излучения. Аппарат был доставлен в некоторую точку Солнечной системы и приведен изначально в состояние покоя относительно Солнца, не вращаясь. При этом Солнце освещало половину каждого из полушарий аппарата. Каким полушарием аппарат начнет поворачиваться к Солнцу сразу после начала своей работы? Материалы, из которых состоит аппарат, устойчивы, не испаряются и не меняют своих свойств со временем. Центр масс аппарата находится в его геометрическом центре. Действие планет и малых тел Солнечной системы на аппарат не учитывать.**

**!** Так как аппарат маленький и легкий, существенное влияние на его движение будут оказывать силы светового давления, которые могут быть сравнимы с силой притяжения Солнца. Действие этих сил может привести к тому, что аппарат может начать поворачиваться к Солнцу одним из своих полушарий. Это может произойти вследствие вращения аппарата или его перемещения в боковом направлении относительно Солнца.

Чтобы понять, начнет ли аппарат вращаться, рассмотрим все силы, действующие на него. Гравитационная сила $\mathbf{F_G}$ направлена точно к Солнцу и приложена к центру масс сферического аппарата. Очевидно, она не создает момента сил и не может привести к вращению. Сила светового давления $\mathbf{F_E}$ есть сумма импульсов $\mathbf{p_E}$, переданных аппарату фотонами, попавшими в него за единицу времени. Рассмотрим фотон, попадающий в зеркальную полусферу. Он отразится от нее в соответствии с законами геометрической оптики. Импульс, переданный сфере этим фотоном ($\mathbf{p_{E1}}$) будет направлен вдоль радиуса сферы, к его центру. Это свойство выполняется для любой точки зеркальной полусферы, в которую попадет фотон. Следовательно, суммарный момент сил фотонного давления, действующих на зеркальную полусферу, равен нулю.

Пористая поверхность в каждой своей точке будет отражать излучение в широком диапазоне углов. Если в грубом приближении принять, что свет из каждой точки рассеивается изотропно в полусферу, то сила реакции от уходящих фотонов не будет создавать момента движения, но он будет создаваться импульсами падающих фотонов, направленными от Солнца ($\mathbf{p_{E2}}$ на рисунке). Из этого можно сделать вывод, что сферический аппарат начнет вращаться, поворачиваясь к Солнцу зеркальным полушарием.




Можно рассмотреть ситуацию более детально и учесть, что распределение рассеянного света в каждой точке не будет изотропным. На примере Луны, которая светит в небе Земли в полнолуние примерно в 10 раз ярче, чем в первой или последней четверти, мы видим, что отражение имеет преимущественное направление назад, обратно к Солнцу, причем это правило сохраняется для любого угла ориентации поверхности к Солнцу. У этого эффекта есть несколько причин, в том числе чисто геометрическая – при наблюдении со стороны Солнца мы не видим теней на пористой поверхности сферы, и она предстает нам наиболее яркой. В результате подобного процесса импульс $\mathbf{p}_{E2}$, сообщенный аппарату, будет еще большим и также направленным противоположно Солнцу (или, строго говоря, образует малый угол с этим направлением). Как видно на рисунке и уже сказано выше, совокупность таких импульсов создает момент вращения, который начнет поворачивать аппарат зеркальным полушарием к Солнцу.

Наряду с вращением проявится еще один эффект, который также приведет к повороту зеркального полушария к Солнцу. Как видно на рисунке, сила фотонного давления на пористое полушарие направлена практически вдоль линии «Солнце-аппарат», перпендикулярная составляющая этой силы мала. В то же время для зеркальной полусферы эта компонента значительна, и она приведет к движению всего аппарата вбок по отношению к Солнцу зеркальным полушарием назад. Этот эффект также приведет к тому, что большая часть зеркального полушария со временем станет освещена солнечными лучами.

## II 5 ДАЛЕКАЯ ЭКСПЕДИЦИЯ

О.С. Угольников

**? Космическая экспедиция прибыла на обитаемую планету в далекой звездной системе. Температурные условия на этой планете были аналогичны земным. При этом вторая космическая скорость для поверхности этой планеты оказалась ровно вдвое меньше третьей космической скорости и в 50 раз меньше второй космической скорости для поверхности звезды, вокруг которой обращается планета. Орбита планеты круговая. Найдите эффективную температуру центральной звезды.**

! Обозначим массу и радиус звезды через $M$ и $R$, массу и радиус планеты – через $m$ и $r$, расстояние от звезды до планеты – через $L$. Получим выражения для всех скоростей, указанных в условии задачи. Вторая космическая скорость для поверхности планеты равна

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm}{r}}.$$

Третья космическая скорость – это минимальная скорость запуска тела с поверхности планеты, при которой оно может в дальнейшем покинуть зону притяжения не только планеты, но и центральной звезды. Для определения этой скорости запишем выражение для орбитальной скорости планеты

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{L}}.$$

Чтобы в дальнейшем покинуть окрестности звезды, физическое тело на расстоянии $L$ от звезды должно иметь скорость, не меньшую

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{L}} = \sqrt{2}v_0.$$

Минимальная скорость тела относительно планеты в этом случае будет равна

$$u = v - v_0 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{GM}{L}}.$$

Чтобы иметь такую скорость после выхода из сферы притяжения планеты, скорость при запуске должна составлять

$$v_3 = \sqrt{u^2 + \frac{2Gm}{r}} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})\frac{GM}{L} + \frac{2Gm}{r}}.$$

Мы получили выражение для третьей космической скорости на поверхности планеты. Остается записать выражение для второй космической скорости на поверхности звезды:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

По условию задачи

$$v_3 = 2\,v_2,$$

$$V_2 = 50\,v_2.$$

Подставляя в эти соотношения полученные выше формулы, записываем:

$$(3-2\sqrt{2})\frac{GM}{L} + \frac{2Gm}{r} = 4\cdot\frac{2Gm}{r};$$

$$\frac{2GM}{R} = 2500\cdot\frac{2Gm}{r}.$$

Из первого соотношения следует:

$$(3-2\sqrt{2})\frac{GM}{L} = \frac{6Gm}{r}.$$

Далее, из второго соотношения:

$$(3-2\sqrt{2})\frac{GM}{L} = \frac{6}{2500}\frac{GM}{R}.$$

В итоге, мы получаем связь радиуса звезды и расстояния от нее до планеты:

$$L = \frac{2500\cdot(3-2\sqrt{2})}{6}R = K\cdot R,$$

где число $K$ составляет 71.5. Отсюда следует, что видимый угловой радиус звезды $\rho$ при наблюдении с планеты составляет $(1/K)$ радиан или $48'$, что примерно в 3 раза больше углового радиуса Солнца при наблюдении с Земли. Обозначим радиус Солнца через $R_0$, расстояние от Солнца до Земли – через $L_0$. Сходство температурных условий на Земле и далекой планете означает, что поток энергии от Солнца на Земле и от звезды на ее планете одинаков. Учитывая закон Стефана-Больцмана для светимостей звезд, получаем

$$\frac{4\pi\sigma\,T^4R^2}{4\,\pi\,L^2} = \frac{4\pi\sigma\,T_0^4R_0^2}{4\,\pi\,L_0^2}.$$

Здесь $\sigma$ – постоянная Стефана-Больцмана, $T$ и $T_0$ – эффективные температуры звезды и Солнца. Отсюда мы получаем выражение для эффективной температуры звезды:

$$T = T_0\sqrt{\frac{R_0}{L_0}\cdot\frac{L}{R}} = T_0\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} = T_0\sqrt{K\cdot\rho_0}.$$

Здесь $\rho_0$ – видимый радиус Солнца при наблюдении с Земли. Эффективная температура звезды составляет около 3500 K.

## III 6 МНОЖЕСТВО ЦИВИЛИЗАЦИЙ

О.С. Угольников

**? Представьте себе, что около каждой десятой звезды в нашей Галактике существует по одной обитаемой планете. Жители всех этих планет проводят поиски других цивилизаций, пользуясь только данными сверхточной фотометрии звезд. Точность измерений блеска составляет $0.00001^m$ для звезд $0^m$ и ухудшается в 2 раза для звезд в 4 раза слабее, в 3 раза для звезд в 9 раз слабее и т.д. Сколько цивилизаций в результате смогут в обозримом будущем (за 100 ближайших лет) открыть планету Земля около звезды Солнце? Объемную концентрацию звезд в диске Галактики считать равной 1 пк$^{-3}$.**

! Так как по условию задачи все цивилизации пользуются только данными звездной фотометрии, не изучая спектры или собственное движение звезд, единственное проявление существования Земли около Солнца, которое они могут зафиксировать – падение блеска Солнца при прохождении Земли по его диску. Расстояния до звезд несравнимо больше расстояния между Солнцем и Землей. В этом случае мы можем вычислить величину максимального падения блеска Солнца:

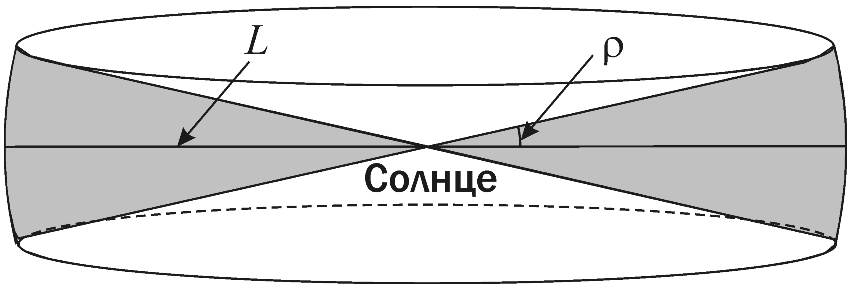
$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{R^2 - r^2}{R^2} = 0.000091^{\mathrm{m}}.$$

Эта величина в 9.1 раз больше точности фотометрии звезд $0^m$, доступной далеким цивилизациям. Следовательно, подобное падение блеска они смогут заметить не только у звезд $0^m$, но и у звезд в $9.1^2$, то есть в 83 раза слабее. Предельная звездная величина, для которой возможна такая регистрация, составит

$$m = 0 + 2.5 \lg 83 = 0 + 5 \lg 9.1 = 4.8.$$

Полученное значение совпадает с абсолютной звездной величиной Солнца. Такой блеск наша звезда имеет с расстояния $L$, равного 10 пк. Чтобы открыть планету Земля, зафиксировав ее прохождение по диску Солнца, другая цивилизация должна располагаться не далее 10 пк от Солнечной системы.

Но и среди близких звезд далеко не с каждой можно будет наблюдать прохождение Земли по диску Солнца. Для этого звезда должна находиться достаточно близко к плоскости эклиптики. На рисунке показана соответствующая область пространства. Видно, что угловое расстояние звезды от линии эклиптики при наблюдении с Земли не должно превышать ρ – угловой радиус Солнца. Ограничи-




вая эту область пространства сферой радиусом 10 пк, мы получаем фигуру, показанную на втором рисунке. Планета Земля сможет быть открыта со всех обитаемых планет, попавших внутрь этой фигуры.

Собственное движение звезд мало влияет на количество этих планет. Характерные собственные движения даже самых близких звезд за редким исключением не превосходят 1-2″ в год. Так как вопрос задачи относится к периоду в 100 ближайших лет, звезды преодолеют в своем движении не более 100-200″, что меньше величины ρ (около 1000″). Число звезд, влетевших в данную область пространства за 100 лет, будет существенно меньше числа звезд, уже находившихся в нем в начале данного периода.

Нам необходимо вычислить объем полученной фигуры. Это можно сделать, представив ее как цилиндр радиусом $L$ и высотой $2L\rho$, из которого вырезаны два конуса радиусом $L$ и высотой $L\rho$. Объем получается равным

$$V = \pi L^2 \cdot 2L\rho - 2\cdot\frac{1}{3}\pi L^2 \cdot L\rho = \frac{4}{3}\pi\rho L^3.$$

Взяв радианную меру угла ρ (около 0.0047), получаем величину объема: 20 пк$^3$. В этот объем попадут около 20 звезд. Если у каждой десятой звезды окажется по одной обитаемой планете, то, скорее всего, две цивилизации смогут узнать о существовании планеты Земля около звезды Солнце.