10 класс

10 1 КАНУН ЭРЫ КОСМОНАВТИКИ

О.С. Угольников

? В канун дня первого полета человека в космос, 11 апреля 1961 года в $03^{ч}30^{м}$ по Московскому времени планета Венера оказалась в нижнем соединении с Солнцем. В некоторой точке поверхности нашей планеты в этот момент Солнце было видно на горизонте, а Венера располагалась точно над Солнцем. На какой высоте над горизонтом ее можно было увидеть в этот момент? Найдите расстояние (по поверхности Земли) между этой точкой Земли и космодромом Байконур. Координаты космодрома: 45°58′ с.ш., 63°18′ в.д. Гелиоцентрическая эклиптическая широта Венеры была равна +2°48′. Орбиты Венеры и Земли считать круговыми. Рефракцией, угловыми размерами Солнца и уравнением времени пренебречь. Летнее время на территории СССР в 1961 году не вводилось.

! Решение – см. задание 1 для 9 класса, стр. 3.

10 2 НЕБЕСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА БОРТУ

О.С. Угольников

? Космонавты совершают полет вокруг Земли по круговой орбите. Какое максимальное число раз подряд (за 1 сутки) они смогут зафиксировать: а) полнолуние, б) весеннее равноденствие, в) противостояние Марса? Все явления фиксируются в системе отсчета, связанной со станцией. Орбиты Земли, Луны и Марса – круговые.

! Чтобы дать ответ на поставленные вопросы, нужно вспомнить определения каждого из трех астрономических явлений. Первое из них – полнолуние – фиксируется в тот момент, когда Луна оказывается в противостоянии с Солнцем, причем (если быть совсем точным) в эклиптической системе координат. Иными словами, видимые эклиптические долготы Солнца и Луны должны отличаться на 180°. Нам необходимо выяснить, может ли подобная картина наблюдаться в день полнолуния на орбитальной станции несколько раз.

Мысленно перенесемся на поверхность Луны в центр ее видимого диска. При наблюдении оттуда Солнце будет двигаться относительно звезд практически точно вдоль эклиптики, а Земля – в ту же сторону под малым углом к эклиптике. Периоды этих движений (T_E и T_L соответственно) составляют 365.25 и 27.32 суток. Угловая скорость движения Земли относительно Солнца будет равна

$$\omega_L = \frac{2\pi}{T_L} - \frac{2\pi}{T_E}.$$

Переводя во внесистемные единицы, мы получаем значение этой угловой скорости: 0.508° в час. Полный оборот в 360° относительно Солнца Земля завершит за один синодический лунный месяц: 29.53 суток.

В момент полнолуния при наблюдении из данной точки Луны Солнце и наблюдатель (орбитальная станция) должны оказаться в соединении, то есть иметь одинаковую эклиптическую долготу. Нас интересует максимальное число подобных событий в течение дня. Оно может быть достигнуто, если станция будет периодически опережать и отставать от Земли по эклиптике на наибольшую возможную величину – видимый радиус своей орбиты. Это условие выполняется, если, к примеру, плоскость орбиты станции будет перпендикулярна линии Земля-Луна и совпадет с картинной плоскостью при наблюдении с Луны (см. рисунок далее).

Пусть радиус орбиты станции составляет R, а период ее обращения – T. Тогда угловой диаметр орбиты станции при наблюдении с Луны (в радианах) составит

$$d = \frac{2R}{L},$$

где L – расстояние от Земли до Луны. Определим интервал времени, в течение которого вся орбита будет пересекать линию соединения с Солнцем (вертикальную линию на рисунке):

$$T_0 = \frac{d}{\omega_\mathrm{L}} = \frac{2R}{L\omega_\mathrm{L}}.$$

Число оборотов, которое станция сможет совершить за это время, составит

$$N = \frac{T_0}{T} = \frac{2R}{L\omega_\mathrm{L} T}.$$

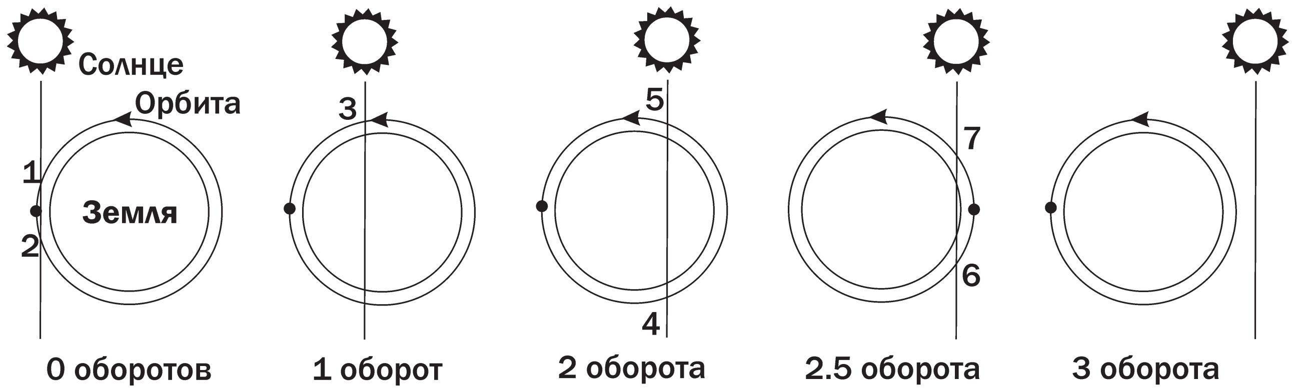
Радиус орбиты и период обращения станции связаны III законом Кеплера:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}.$$

Здесь M – масса Земли. Отсюда:

$$N = \frac{1}{\pi L\omega_\mathrm{L}}\sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{v}{\pi L\omega_\mathrm{L}}.$$

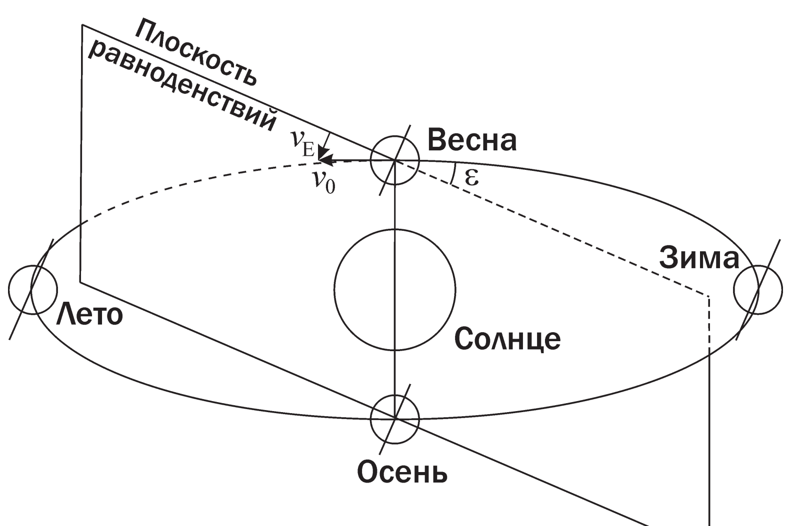
Здесь v – круговая орбитальная скорость станции. Из получившегося соотношения мы можем сделать вывод, что чем выше круговая скорость станции, тем больше полнолуний удастся зафиксировать космонавтам. Если принять минимальный радиус орбиты равным 6600 км (высота 230 км), то скорость будет равна 7.8 км/с. Число оборотов N оказывается равным около 2.6, т.е. чуть больше двух с половиной. Из этого сразу можно сделать вывод, что полнолуние может наблюдаться несколько раз. Чтобы определить их максимальное количество, обратимся к рисунку.



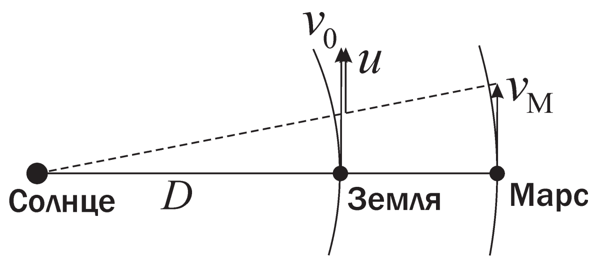
Пусть в некоторый момент передняя точка орбиты станции при наблюдении с Луны вступила в соединение с Солнцем, а через короткое время после этого в этой точке оказалась сама станция. Тогда, как видно на первом рисунке, на станции будут зарегистрированы сразу два полнолуния, разделенные небольшим интервалом времени. В течение одного оборота станции после этого она вновь пересечет круг эклиптической широты Солнца (полнолуние 3) и окажется левее Солнца на небе Луны. Следующий (второй) оборот будет содержать еще два полнолуния – 4 и 5. Сделав далее половину оборота, станция зафиксирует 6-е полнолуние и окажется справа от Солнца на небе Луны. В этот же момент круг эклиптической широты (вертикальная линия на рисунке) уже близко подойдет к правому краю орбиты. После 7-го пересечения с этой линией станция окажется левее Солнца и больше уже не пересечет линию. Итак, за одни сутки (а точнее, за интервал времени около 4 часов) на орбитальной станции могут быть зафиксированы сразу 7 полнолуний.

Весеннее равноденствие в системе отсчета, связанной со станцией, будет зафиксировано, когда положение центра Солнца окажется в точности на небесном экваторе, причем Солнце должно будет перейти из южного небесного полушария в северное. Другими словами, станция должна находиться в «плоскости равноденствий» – плоскости, параллельной плоскости земного экватора и проходящей через Солнце. Двигаясь по орбите со скоростью v_0, равной 29.8 км/с, Земля пересекает эту плоскость в дни равноденствий под углом ε, равным 23.4°. Составляющая скорости Земли, перпендикулярная плоскости равноденствий, будет равна

$$v_E = v_0 \sin \varepsilon = 11.8 \text{ км/с}.$$



Эта величина больше первой (и даже второй) космической скорости вблизи поверхности Земли. Следовательно, орбитальное движение станции, вне зависимости от величины и направления скорости, не может компенсировать движение Зем-



ли относительно плоскости равноденствий. И на борту станции, как и во всех точках Земли, весеннее равноденствие будет зафиксировано ровно один раз.

Наконец, противостояние Марса фиксируется, когда наблюдатель оказывается на отрезке, соединяющем Солнце и Марс (точнее, проекцию Марса на плоскость эклиптики). Чтобы определить число возможных противостояний, вычислим скорость Земли относительно данной линии в день противостояния.

Линия «Солнце-Марс» вращается вокруг Солнца вместе с самим Марсом с угловой скоростью

$$\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}.$$

Здесь T_M – орбитальный период Марса. Скорость Земли относительно этой линии составит

$$u = v_0 - \omega_M D = D \cdot (\omega_E - \omega_M) = 2\pi D \cdot \left(\frac{1}{T_E} - \frac{1}{T_M}\right) = \frac{2\pi D}{S_M}.$$

Здесь D – расстояние от Земли до Солнца, ω_E – угловая скорость орбитального движения Земли, S_M – синодический период Марса (780 суток). Скорость получается равной около 14 км/с. Как и в случае равноденствия, движение орбитальной станции вокруг Земли не может компенсировать такую скорость. Противостояние Марса на борту станции будет зафиксировано только одно.

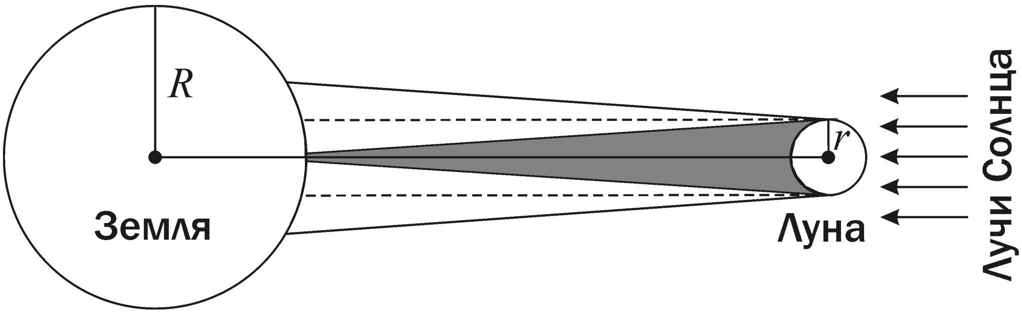
10 3 ЗЕМЛЯ ИЗДАЛЕКА

О.С. Угольников

? На новой обсерватории, построенной астронавтами на поверхности Марса, проводятся наблюдения Земли. В это время на нашей планете происходит полное солнечное затмение. Какого максимального значения может достичь величина падения блеска Земли, вызванного вступлением на нее лунной тени и полутени? Может ли астронавт заметить ослабление Земли невооруженным глазом, если да, то при каких условиях?

! Во время полного солнечного затмения на Землю падает лунная тень, окруженная лунной полутенью. В область тени солнечные лучи вообще не попадают, но ее размеры очень малы. Основной вклад в ослабление блеска Земли при наблюдении извне будет вносить лунная полутень, внутри которой наблюдается частное солнечное затмение. Освещенность внутри полутени уменьшается не столь сильно, но размеры самой полутени достаточно велики.

Рассмотрим наиболее простой случай – Земля наблюдается со стороны Солнца и видна как полный диск. На него падает лунная тень (в центре) и полу-



тень. Ослабление видимой яркости поверхности Земли внутри полутени неоднородно, оно тем сильнее, чем ближе данная точка поверхности к лунной тени. Расчет величины ослабления в разных областях полутени – достаточно сложная задача. Однако нам нужно лишь оценить максимальную величину общего падения яркости всего диска Земли. Для этого заметим, что количество солнечной энергии, падающей на Землю вне затмения в единицу времени, составляет

$$E_0 = J{\cdot}\pi R^2,$$

где J – поток энергии от Солнца на расстоянии Земли, а R – радиус Земли. Из этой энергии Луна задерживает величину

$$\Delta E = J{\cdot}\pi r^2,$$

где r – радиус Луны. В итоге, количество энергии, попадающее на Землю, составляет

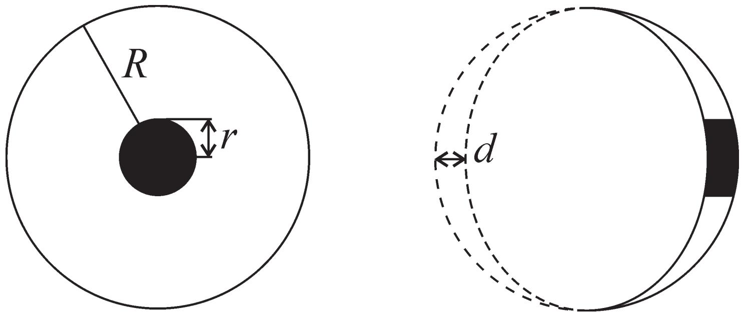
$$E = E_0 - \Delta E = J{\cdot}\pi(R^2 - r^2).$$

В конусе полутени эта энергия перераспределяется между различными областями поверхности Земли, но ее суммарное значение не меняется. Поэтому для оценки падения блеска мы можем заменить реальную картину более простой моделью без полутени, но с большой тенью, имеющей радиус, равный радиусу Луны r (фактически это бесконечно удаленного Солнца или малого расстояния между Луной и Землей).

Если мы наблюдаем Землю со стороны Солнца, а тень Луны попадает на Землю в область центра, то падение блеска Земли в звездных величинах составит

$$\Delta m_1 = -2.5\lg\frac{E}{E_0} = -2.5\lg\frac{R^2 - r^2}{R^2} = 0.08.$$

Такое изменение яркости заметить невооруженным глазом не удастся. Однако данная величина не является максимально возможной. Вспомним, что наблюдения проводятся на Марсе, и для прибывших туда астронавтов Земля является внутренней планетой. При определенном положении относительно Солнца и Марса Земля может выглядеть в виде серпа. Обозначим его толщину (в масштабах Земли) через d (правый рисунок).



Терминатор Земли представляет собой половину эллипса, имеющего большую полуось R и малую полуось $(R - d)$. Площадь этого эллипса равна

$$S_E = \pi \cdot R \cdot (R - d).$$

Если обозначить площадь всего диска через S, то площадь освещенного серпа составит

$$S_F = \frac{S - S_E}{2} = \frac{\pi R d}{2} = \pi R^2 \frac{d}{2R} = \pi R^2 F.$$

Здесь F – фаза серпа. Попутно мы доказали, что для серпа, освещенного Солнцем под определенным углом, понятия линейной и площадной фазы идентичны (но это не так для понятия фазы затмения).

Пусть серп Земли достаточно тонок, и его толщина d меньше радиуса Луны r. Воспользовавшись той же моделью тени Луны радиусом r без полутени (с некоторой точностью ее можно использовать для оценки и в этом случае), мы можем представить тень Луны в виде прямоугольника со сторонами d и $2r$. Его площадь равна

$$S_D = 2 \cdot r \cdot d.$$

Падение блеска Земли в звездных величинах составит

$$\Delta m_2 = -2.5 \lg \frac{S_F - S_D}{S_F} = -2.5 \lg \frac{\frac{\pi R d}{2} - 2rd}{\frac{\pi R d}{2}} = -2.5 \lg \frac{\pi R - 4r}{\pi R} \approx 0.5.$$

Это уже достаточно большая величина, и подобное изменение блеска можно заметить невооруженным глазом. При этом нужно принять во внимание, что видимая звездная величина Земли уменьшится не мгновенно, а в течение часа (время вступления полутени на Землю). Чтобы заметить постепенное ослабление Земли при визуальных наблюдениях, рядом с ней должен находиться другой источник с постоянным блеском, близким к блеску Земли. Это может быть искусственный источник, а может быть и небесный объект. Вспомним, что на небе Марса есть еще одна планета, очень близкая по видимой яркости к Земле (около -3^m) – Венера. Она будет находиться на небе не очень далеко от Солнца и вполне может вступить в соединение с Землей, когда последняя будет иметь фазу тонкого серпа.

10 4 К САТУРНУ МИМО ПАТРОКЛА

О.С. Угольников

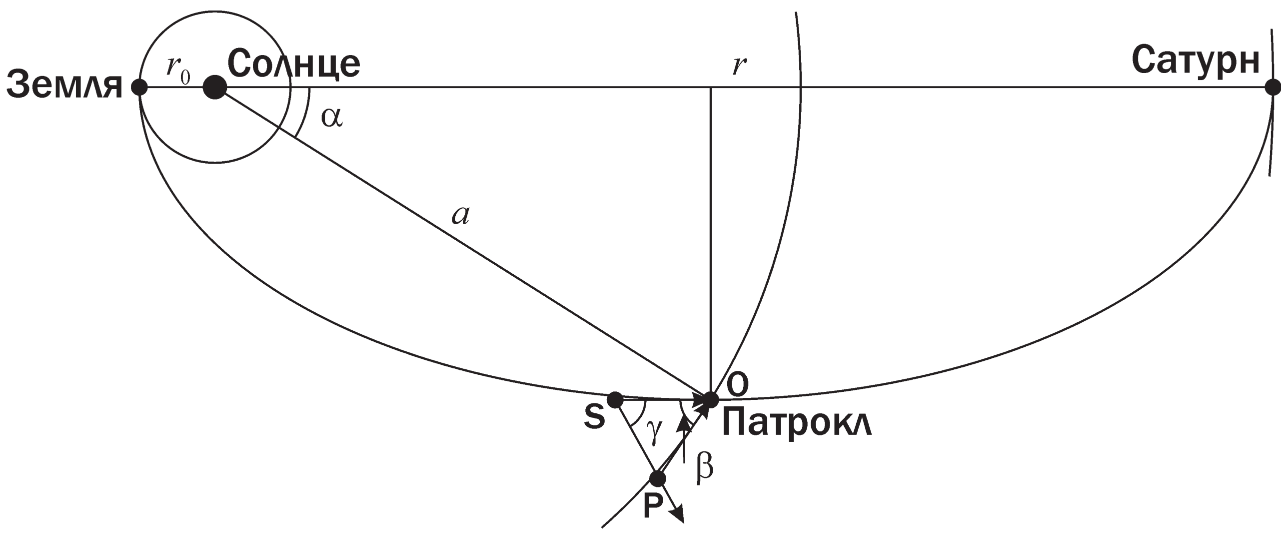
? Межпланетный аппарат отправляется 1 декабря с Земли к Сатурну по энергетически выгодной траектории. Расписание миссии включает в себя близкий пролет мимо астероида Патрокл из группы «Троянцев», движущихся по орбите Юпитера в ту же сторону, что и планета. Изучение астероида началось за несколько месяцев до пролета. В каком созвездии (при наблюдении с аппарата) в это время находился Патрокл? Орбиты Патрокла и всех больших планет считать круговыми, массу Патрокла – малой.

! Аппарат летит от Земли к Сатурну по энергетически выгодной траектории – половине эллипса, перигелий которого совпадает с точкой старта (Земля), а афелий располагается на орбите Сатурна. Направление движения аппарата совпадает с направлением движения планет (против часовой стрелки, если смотреть с северной стороны). Обозначим радиусы орбит Земли и Сатурна через r_0 и r. Большая полуось данного эллипса составит

$$a = \frac{r + r_0}{2}$$

или 5.27 а.е. Это очень близко к значению радиуса орбиты Юпитера и Патрокла. Данное совпадение существенно облегчает решение задания. Изобразим траекторию движения аппарата на рисунке. Как известно, для любой точки эллипса сумма расстояний до двух фокусов одинакова и равна $2a$. Когда аппарат находится на малой оси эллипса (точка **O**), расстояние до каждого из фокусов равно большой полуоси эллипса a. В одном из фокусов находится Солнце. Следовательно, расстояние от точки **O** до Солнца равно a, и как раз вблизи этой точки состоится сближение аппарата с астероидом. Из рисунка по теореме Пифагора мы можем определить величину угла α:

$$\alpha = \arccos\frac{a - r_0}{a} = 36°.$$



Как известно, скорость аппарата на произвольном расстоянии d от Солнца можно определить из закона сохранения энергии:

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{d} - \frac{1}{a}\right)}.$$

Для точки **O** мы получаем:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}}.$$

Итак, гелиоцентрическая скорость аппарата по модулю совпадет с круговой скоростью на том же расстоянии, то есть, со скоростью Патрокла. Пусть за некоторое небольшое время до сближения аппарат находился в точке **S**, а Патрокл – в точке **P**. Из равенства скоростей мы имеем равенство отрезков **SO** и **PO**, треугольник **SOP** является равнобедренным. При этом отрезок **SO** параллелен большой оси эллипса, а отрезок **PO** – перпендикулярен направлению от Солнца к точке **O**. Отсюда мы можем получить значение угла в вершине равнобедренного треугольника

$$\beta = 90° - \alpha = 54°.$$

Углы при основании этого треугольника равны

$$\gamma = 90° - (\beta/2) = 45° + (\alpha/2) = 63°.$$

Направление, в котором виден Патрокл с аппарата (точка **P** из точки **S**) образует угол γ с направлением, в котором было видно Солнце с Земли в день старта, причем данный угол отсчитывается к западу. Дугу в 63° Земля проходит по своей орбите за 62 дня. Патрокл будет виден с аппарата в созвездии, в котором Солнце было видно с Земли за 62 дня до запуска, то есть 30 сентября. Это созвездие Девы.

10 5 ПОСАДКА НА ВЕНЕРУ И ТИТАН

Е.Н. Фадеев

? **Определите, во сколько раз изменится вес космического аппарата на экваторе Венеры и на экваторе Титана по сравнению с его весом на экваторе Земли. Космический аппарат имеет форму шара диаметром 1 метр и массой 100 кг.**

! Вес – это сила, с которой тело давит на горизонтальную опору или растягивает вертикальный подвес. На любое тело, находящееся на поверхности планеты (или спутника планеты), действует сила притяжения, направленная к центру этой планеты. Если планета вращается, то тело будет двигаться вместе с поверхностью планеты с центростремительным ускорением. Эффект будет аналогичен действию центробежной силы, направленной от оси вращения планеты (на экваторе – от центра планеты). Наконец, если у планеты или спутника есть атмосфера (Венера, Земля и Титан ей обладают), на тело будет действовать архимедова сила, также направленная против силы тяжести и стремящаяся поднять его вверх. На экваторе все эти силы будут направлены вдоль линии «центр планеты – тело», но направление их будет различаться: архимедова и центробежная силы будут действовать противоположно силе гравитации.

В соответствии с законом всемирного тяготения величина силы притяжения на поверхности планеты (спутника) выражается формулой:

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} = mg.$$

Здесь M и r – масса и радиус планеты, m – масса тела, g – ускорение свободного падения. Центробежная сила равна

$$F_c = m\omega^2 r = \frac{4\pi^2 m r}{T^2},$$

где ω – угловая скорость вращения планеты вокруг оси, T – ее осевой период. Наконец, для силы Архимеда справедливо соотношение:

$$F_a = \rho g V.$$

Здесь ρ – плотность атмосферы планеты, V – объем тела. Плотность атмосферы может быть вычислена из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT,$$

где μ – молярная масса атмосферного газа, p – давление, T – температура, R – универсальная газовая постоянная. В итоге,

$$F_a = \frac{p\mu g V}{RT}.$$

Молярную массу атмосферного газа можно вычислить по его химическому составу. Для Земли она составляет 0.029 кг/моль. Атмосферы Венеры и Титана состоят из одного основного газа с незначительными примесями. В качестве величин молярной массы для атмосферы Венеры мы можем взять молярную массу углекислого газа (0.044 кг/моль), а для атмосферы Титана – молярную массу молекулярного азота (0.028 кг/моль).

Вес тела на поверхности планеты или спутника будет равен

$$F = F_g - F_a - F_c.$$

Вычислим все эти силы для трех небесных тел и занесем результаты в таблицу:

	g, м/с^2	F_g, Н	F_c, Н	F_a, Н	F, Н
Земля	9.8	980	3.4	6.1	970
Венера	8.8	880	$5.4\cdot10^{-5}$	310	570
Титан	1.3	130	$5.4\cdot10^{-3}$	3.6	130

Мы видим, что на Земле и Титане вес данного космического аппарата определяется гравитационной силой. На Венере с ее плотной атмосферой вес существенно ослаблен архимедовой силой. Центробежная сила на всех трех телах мала и не сказывается на весе. Рассчитаем, во сколько раз вес аппарата на Земле (индекс «E») будет больше, чем на Венере (индекс «V») и Титане (индекс «T»):

$$P_\mathrm{V} = \frac{F_\mathrm{E}}{F_\mathrm{V}} = 1.7; \quad P_\mathrm{T} = \frac{F_\mathrm{E}}{F_\mathrm{T}} = 7.5.$$

10 **6**

ТРАНСЗВЕЗДНЫЙ ПЕРЕЛЕТ

О.С. Угольников

? Космический аппарат «Розетта», оснащенный солнечными батареями размером более 30 метров, в настоящее время находится на пути к комете Чурюмова-Герасименко, с которой встретится в 2014 году. Незадолго до этой встречи «Розетта» окажется на расстоянии 5.4 а.е. от Солнца, что станет рекордной величиной для аппарата, работающего на солнечных батареях. Мог бы этот аппарат в рабочем режиме совершить перелет между окрестностями компонент двойной звезды Сириус A и Сириус B? Видимый блеск этих звезд составляет -1.6^m и 8.5^m соответственно, а угловое расстояние между ними – 10″. Считать, что обе звезды находятся в точности на одинаковом расстоянии от Солнца.

! Поток световой энергии, идущей от Солнца на расстоянии 5.4 а.е. и поглощаемый солнечными батареями «Розетты», достаточен для ее нормального функционирования. Определим звездную величину Солнца на данном расстоянии:

$$m_1 = m_0 + 5\lg 5.4 = -23.1.$$

Здесь m_0 – звездная величина Солнца при наблюдении с Земли.

Если принять, что звезды Сириус A и Сириус B располагаются на одинаковом расстоянии от Земли, то линия, соединяющая эти звезды, будет перпендикулярна линии визирования. Тогда расстояние между звездами в пространстве l и расстояние между Землей и Сириусом D будут связаны соотношением

$$l = D\,\alpha,$$

где α – угловое расстояние между компонентами двойной системы в радианах (около $5\cdot 10^{-5}$). Блеск Сириуса A при наблюдении из окрестностей Сириуса B составит

$$m_2 = m_\mathrm{S} + 5\lg(l/D) = m_\mathrm{S} + 5\lg\alpha = -23.1 = m_1.$$

Здесь m_S – блеск Сириуса A на Земле. Мы видим, что даже в конце полета поток энергии от Сириуса A будет не меньше, чем поток от Солнца на расстоянии 5.4 а.е. Следовательно, аппарат «Розетта» мог бы совершить перелет между двумя компонентами Сириуса в рабочем режиме.