11 класс

Задача 1. Груз на горке

Пусть скорость системы в начальном состоянии v_0, высота горки H. Запишем закон сохранения энергии и закон сохранения импульса для системы груз–горка:

$$mgH + (m+M)\frac{v_0^2}{2} = M\frac{v_1^2}{2} + m\frac{v_2^2}{2}, \tag{7}$$

$$(m+M)v_0 = Mv_1 + mv_2, \tag{8}$$

где v_1 — скорость горки после соскальзывания груза, v_2 — скорость соскользнувшего груза.

Поскольку нас не интересует конечная скорость горки, то исключим из уравнений (7) и (8) скорость v_1, в результате чего получим:

$$v_2^2 - 2v_0v_2 + v_0^2 - 2gH\left(\frac{M}{m+M}\right) = 0.$$

Так как по условию задачи $v_2 > v_0$, то запишем:

$$v_2 = v_0 + \sqrt{2gH\left(\frac{M}{m+M}\right)}. \tag{9}$$

Теперь учтём, что $m \ll M$. В этом случае уравнение (9) упростится:

$$v_2 = v_0 + \sqrt{2gH}.$$

Кинетическая энергия груза, съехавшего с горки, равна:

$$\text{К}_2 = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgH + mv_0\sqrt{2gH}. \tag{10}$$

По условию $\Pi = 4\text{К}_1$, откуда следует, что:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gH}{2}}. \tag{11}$$

После подстановки (11) в (10) окончательно имеем:

$$\text{К}_2 = \text{К}_1 + \Pi + mgH = 2{,}25\Pi = 2{,}25 \text{ Дж}.$$

Примерные критерии оценивания

Записан закон сохранения энергии 1
Записан закон сохранения импульса 1
Решена полученная из них система уравнений 3

Рассмотрены динамическая и статическая силы давления песка 2
Найдена высота H 1
Показано, что $F_{д} + F_{с} = \mu_i g t$ 2
Получено выражение для μ 1
Найдено численное значение μ 1

Задача 3. Цепь с конденсатором

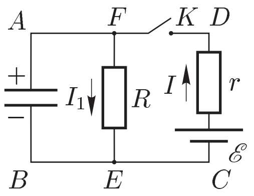

Рис. 23

Энергия, запасённая в конденсаторе, $W = q^2/(2C)$, где q — заряд на обкладках конденсатора, а C — ёмкость конденсатора.

Дифференцируя выражение для энергии по времени, получим:

$$\frac{dW}{dt} = P = UI_C.$$

Запишем второе правило Кирхгофа для контура $ABCD$ (рис. 23), обозначая через I силу тока, текущего через резистор r:

$$Ir + U = \mathscr{E}, \qquad \text{откуда} \qquad I = (\mathscr{E} - U)/r. \tag{14}$$

Применяя второе правило для контура $ABEF$, получим:

$$U = (I - I_C)R, \tag{15}$$

где учтено, что сила тока, текущего через резистор R, равна $I_R = I - I_C$. Подставим в (15) выражение из (14). Тогда:

$$I_C = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathscr{E}R - U(R+r)}{Rr}.$$

Исследуем на максимум произведение $U dq/dt = U(\mathscr{E}/r) - U^2(R+r)/(Rr)$. Это квадратный многочлен, представляющий из себя уравнение параболы, ветви которой направлены вниз. Его значение достигает максимума в вершине параболы, то есть при:

$$U = \frac{R}{2(R+r)}\mathscr{E}.$$

Такое же напряжение будет на конденсаторе в момент размыкания ключа. Тогда количество теплоты, выделившееся в цепи после размыкания ключа, равно:

$$Q = W = \frac{CU^2}{2} = \frac{C\mathscr{E}^2}{8}\left(\frac{R}{R+r}\right)^2.$$

Примерные критерии оценивания

Найдено выражение для $\Delta W/\Delta t$ через U и I_C 1

Учтено, что $m \ll M$ 1
Найдена скорость v_2 1
Получено выражение для $К_2$ 2
Получен численный ответ 1

Задача 2. Нарушение равновесия

Согласно правилу моментов относительно полюса A правый край доски оторвётся от опоры B в момент, когда сила, действующая на левый край доски, станет равной:

$$F = Mg/2. \tag{12}$$

Эта сила складывается из двух составляющих — статической и динамической.

Пока песок летит, он не действует на доску. Время его падения от заслонки бункера до доски равно $\tau = \sqrt{2H/g}$. Зато потом на доску начинает действовать постоянная динамическая составляющая силы:

$$F_{дi} = \mu_i v,$$

где $v = \sqrt{2gH}$ — скорость песка перед падением на доску, μ_i — массовый расход песка в i-м опыте.

В то же время постепенно начинает расти статическая составляющая силы:

$$F_{сi} = \mu_i(t - \tau)g,$$

возникающая за счёт увеличения массы песка на доске. Поэтому в момент времени $t > \tau$ суммарная сила, действующая на доску со стороны песка, равна:

$$F_i = F_{дi} + F_{сi} = \mu_i g t, \tag{13}$$

причём время t отсчитывается от момента открытия заслонки бункера.

Теперь рассмотрим результаты эксперимента. Так как в первых двух опытах время не зависит от расхода песка, то $\tau_1 = \tau = \sqrt{2H/g}$, откуда высота падения песка:

$$H = g\tau_1^2/2 = 5\ \text{м}.$$

Уменьшение массового расхода в 4 раза приводит к тому, что динамической составляющей уже не хватает для начала опрокидывания доски. Тогда, используя (13) и (12), находим массовый расход песка в первом эксперименте:

$$\mu = \frac{M}{2\tau} = 0{,}2\ \text{кг/с}.$$

Примерные критерии оценивания

Из правила моментов найдено условие отрыва доски 2
Записана связь между H и τ 1

откуда следует, что $\varphi_1 \approx 19{,}1^\circ$.

Примерные критерии оценивания

Записан закон Снелла для границы AC 2

Записан закон Снелла для границы AB 2

Выражен показатель n_0 через φ_1 и φ_2 1

Найдена связь между φ_1 и φ_2 1

Показатель преломления n_0 выражен через φ_1 2

Найден угол φ_1 2

Задача 5. Термодинамический «лабиринт»

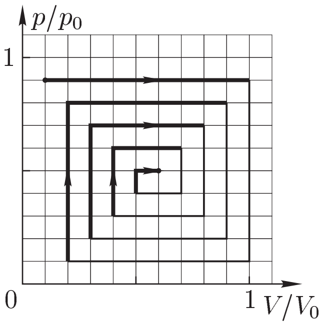

Рис. 25

Теплота подводится к газу на тех изохорах и изобарах, на которых температура возрастает. Обозначим эти участки жирными линиями (рис. 25). Вычислим суммарную работу, совершённую на этих участках, как сумму площадей под выделенными горизонтальными прямыми:

$$\frac{A}{p_0V_0} = \frac{9\cdot 9 + 8\cdot 7 + 7\cdot 5 + 6\cdot 3 + 5\cdot 1}{100},$$

откуда $A = 1{,}95\, p_0V_0$.

Так как метан — многоатомный газ, то его молярная теплоёмкость при постоянном объёме равна $C_V = 3R$. Вычислим изменение внутренней энергии на тех участках, где тепло подводится к газу:

$$\frac{\Delta U}{3p_0V_0} = \frac{1}{100}\Big((10\cdot 9 - 1\cdot 9) + (9\cdot 8 - 2\cdot 1) + (8\cdot 7 - 3\cdot 2) + $$
$$+ (7\cdot 6 - 4\cdot 3) + (6\cdot 5 - 5\cdot 4)\Big) = 2{,}41,$$

откуда $\Delta U = 7{,}23\, p_0V_0$. Тогда подведённое тепло:

$$Q = \Delta U + A = 9{,}18\, p_0V_0.$$

Примерные критерии оценивания

Указаны участки, на которых тепло подводится к газу 2

Вычислена работа на этих участках 3

Определено изменение внутренней энергии 4

Записан верный ответ 1

Определено значение I 2

Записано второе правило Кирхгофа для контура $ABEF$ 1

Получен квадратный многочлен для $\Delta W/\Delta t$ 2

Квадратный многочлен исследован на максимум 2

Найдено выделившееся количество теплоты 2

Задача 4. Призма на воде

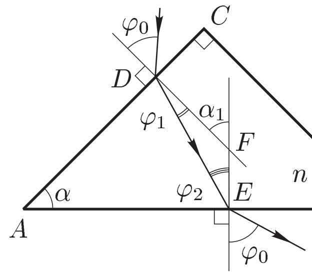

Рис. 24

Пусть показатель преломления стекла равен n. Выполним рисунок, поясняющий ход луча (рис. 24). Запишем закон Снелла для луча, преломляющегося на гранях AC и AB:

$$\text{для грани } AC: \quad \sin\varphi_0 = n\sin\varphi_1; \tag{16}$$

$$\text{для грани } AB: \quad n_0\sin\varphi_0 = n\sin\varphi_2. \tag{17}$$

Разделим почленно уравнение (17) на уравнение (16):

$$n_0 = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}.$$

Так как призма равнобедренная и прямоугольная, то угол $\alpha = 45^\circ$. Для треугольника DEF угол α_1 — внешний. По теореме о внешнем угле треугольника:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha_1.$$

Заметим, что углы α и α_1 равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. С учётом двух последних соотношений получим:

$$n_0 = \frac{\sin(\alpha - \varphi_1)}{\sin\varphi_1} = \frac{\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1}{\sqrt{2}\sin\varphi_1} = \frac{1 - \operatorname{tg}\varphi_1}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi_1}.$$

Подставив в уравнение значение n_0, окончательно получим:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{3}{4\sqrt{2} + 3} \approx 0{,}347,$$