Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа

XXXVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2009–2010 учебный год

Второй день

19–20 января 2010 г.

Москва, 2009

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Акопян, В.В. Астахов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.И. Гарбер, А.А. Глазырин, С.А. Дориченко, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, Л.А. Емельянов, М.И. Исаев, Р.Н. Карасёв, П.А. Кожевников, М.А. Козачок, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, М.В. Мурашкин, О.К. Подлипский, А.М. Райгородский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2009–2010 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 19 и 20 января 2010 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к некоторым задачам указаны рекомендуемые оценки (в баллах) предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

9 класс

9.5. Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность. В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку. (*Р. Женодаров*)

Решение. Запишем каждую из наших разностей со знаком плюс, если в соответствующей паре чисел большее стоит перед меньшим по часовой стрелке, и со знаком минус в противном случае. У нас получились 11 разностей между числом и следующим за ним по часовой стрелке; значит, сумма всех этих чисел равна нулю, то есть чётному числу. Это невозможно, поскольку среди них ровно семь нечётных чисел — четыре числа вида ±1 и три числа вида ±3.

Комментарий. Любое решение, основанное на переборе случаев, в котором не разобран хотя бы один случай, принципиально отличающийся от разобранных, оценивается не более, чем в 1 балл.

9.6. Пусть точки A, B, C лежат на окружности, а прямая b касается этой окружности в точке B. Из точки P, лежащей на прямой b, опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1 на прямые AB и BC соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на отрезках AB и BC). Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$. (*Л. Емельянов*)

Решение. Поскольку $\angle PC_1B = \angle PA_1B = 90^\circ$, четырёхугольник PA_1C_1B вписан. Значит, $\angle CC_1A_1 = 180^\circ - \angle A_1C_1B = \angle A_1PB = 90^\circ - \angle A_1BP$. С другой стороны, $\angle A_1BP = \angle ACB = \frac{1}{2}\smile\!\!AB$. Поэтому $\angle CC_1A_1 = \angle A_1PB = 90^\circ - \angle ACC_1$, то есть прямые A_1C_1 и AC пересекаются под прямым углом.

Комментарий. Доказано, что точки P, A_1, B и C_1 лежат на одной окружности — 1 балл.

9.7. В компании из семи человек любые шесть могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. (*С. Волчёнков*)

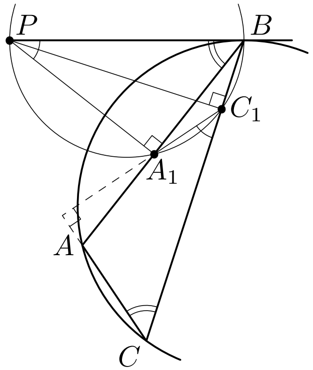

Рис. 1

Решение. Заметим, что у каждого в компании не менее трёх знакомых. Действительно, если бы некто X был знаком менее, чем с тремя, то, исключив из компании одного из его знакомых, мы получили бы шестёрку людей, в которой у X не более одного знакомого, т. е. посадить их за круглый стол невозможно. Более того, если бы у каждого было ровно по три знакомых, то число пар знакомых людей было бы равно $7 \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{2}$, что невозможно.

Значит, у какого-то человека X хотя бы 4 знакомых. Рассадим всех, кроме X, за круглый стол. Тогда из четырёх его знакомых хотя бы двое сидят рядом. Если мы посадим X между ними, то получим требуемую рассадку.

Комментарий. Любое решение, основанное на переборе случаев, в котором не разобран хотя бы один случай, принципиально отличающийся от разобранных, оценивается не более, чем в 1 балл.

9.8. Для каждого натурального n обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1 = 2$, $S_2 = 2+3 = 5$, $S_3 = 2+3+5 = 10$, $\ldots$. Могут ли два подряд идущих члена последовательности (S_n) оказаться квадратами натуральных чисел? *(В. Шарич)*

Ответ. Не могут.

Решение. Обозначим n-е простое число через p_n. Предположим, что нашлось $m > 1$, для которого $S_{m-1} = k^2$, $S_m = \ell^2$, где k и ℓ — натуральные числа. Числа $S_2 = 5$, $S_3 = 10$ квадратами не являются, так что $m > 4$. Заметим, что $p_m = S_m - S_{m-1} = (\ell - k)(\ell + k)$; ввиду простоты p_m получаем $1 = \ell - k$, $p_m = \ell + k = 2\ell - 1 = 2\sqrt{S_m} - 1$. Таким образом, $S_m = \left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2$.

Заметим, что p_m нечётно (так как $m \geqslant 2$), и $1+3+5+\ldots+p_m = (1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + \ldots + \left(\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p_m-1}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2$. С другой стороны, в сумму $S_m = 2 + p_2 + \ldots + p_m$, кроме двойки, входят лишь нечётные числа, и при $m > 4$ не входят нечётное составное число 9 и число 1, поэтому $S_m \leqslant (1 + 3 + 5 + \ldots + p_m) + 2 - 1 - 9 < \left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2$. Противоречие.

Замечание. В последовательности (S_n) встречаются квадраты натуральных чисел. Кроме $S_9 = 100$, известны еще несколько; минимальный из них — это $S_{2474} = 25633969 = 5063^2$.

Комментарий. В предположении, что S_{m-1} и S_m — точные квадраты, получено, что $S_m = \left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2$ — 2 балла.